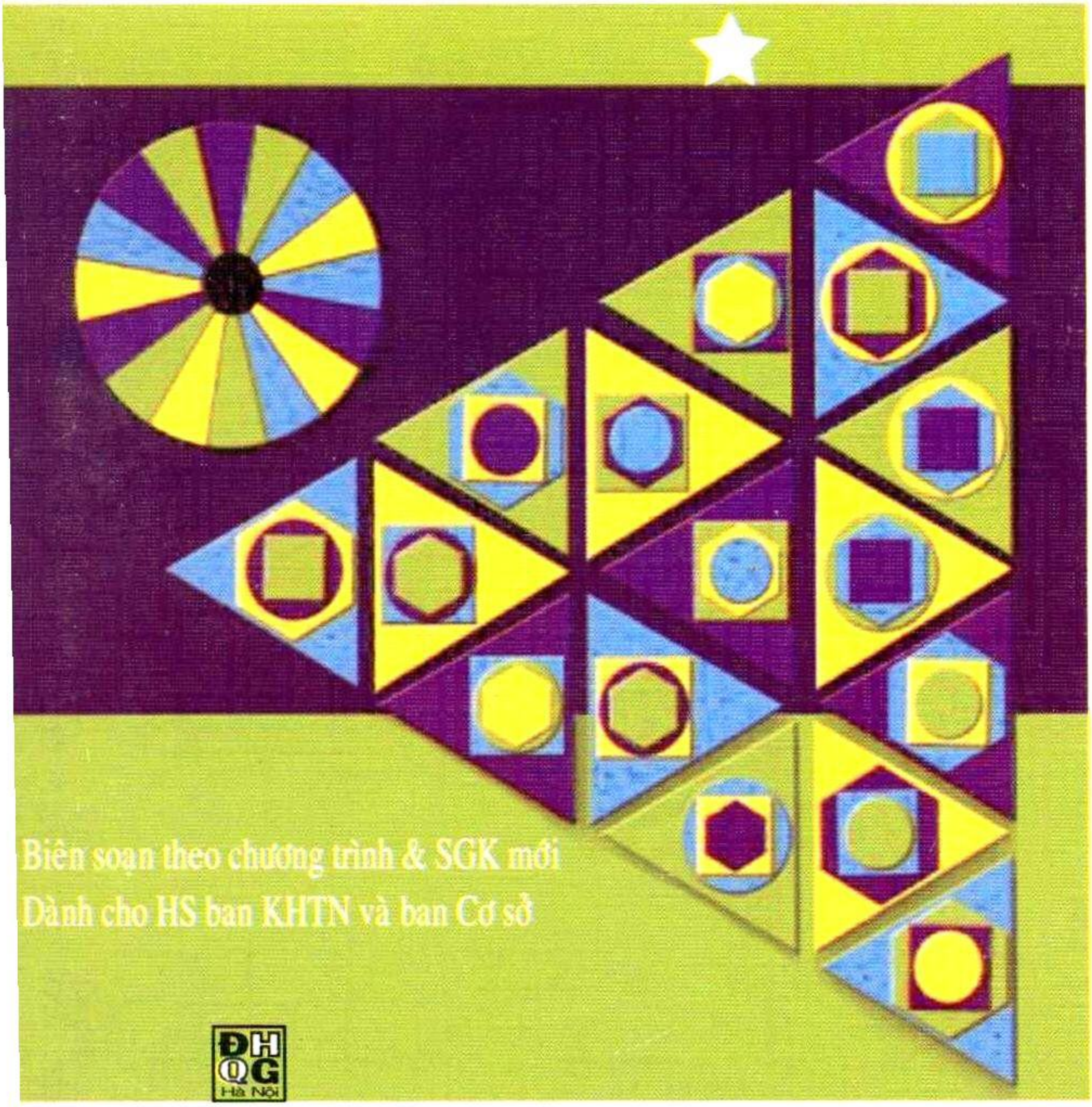
Th.S NGUYỄN KIẾM - *Th.S* LÊ THỊ HƯƠNG - *Th.S* HỒ XUÂN THẮNG

Phân loại và phương pháp giải các dạng bài tập Toán 10

(Chương trình nâng cao)



Biên soạn theo chương trình & SGK mới
Dành cho HS ban KHTN và ban Cơ sở

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Th.S NGUYỄN KIẾM - Th.S LÊ THỊ HƯƠNG - Th.S HỒ XUÂN THẮNG

Tài liệu bổ trợ dành
cho học sinh ban
KHTN và ban CS

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 10

☆

(Biên soạn theo chương trình cơ sở và nâng cao mới của Bộ GD & ĐT)

* Kiến thức cần nhớ
* Phân loại các dạng toán
* Phương pháp giải bài tập
* Các dạng bài tập mẫu
* Bài tập áp dụng tự giải

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
ĐT (04) 9715012; (04) 7685236.
Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@vnu.edu.vn

***

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập nội dung
DIỆU THU – THANH THUỶ
Sửa bài
NGUYỄN NAM
Trình bày bìa
SƠN KỲ

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG BÀI TẬP TOÁN 10 ((tập 1)
Mã số: 1L-52 ĐH2006
In 2000 cuốn, khổ 16x24 tại Công ti cổ phần in Tân Bình
Số xuất bản: 172-2006/CXB/11-13/ĐHQGHN, ngày 07/03/2006.
Quyết định xuất bản số: 153 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2006

Chương I MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

§1. MỆNH ĐỀ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Mỗi mệnh đề phải hoặc đúng hoặc sai.*
   Một mệnh đề không thể vừa đúng, vừa sai.
2. $\overline{A}$ *đúng khi* A *sai,* $\overline{A}$ *sai khi* A *đúng.*
3. A $\Rightarrow$ B *chỉ sai khi* A *đúng và* B *sai.*
4. A $\Leftrightarrow$ B *chỉ đúng khi* A, B *đồng thời đúng hoặc đồng thời sai.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Khái niệm mệnh đề.***

Bài 1: *Các câu sau đây câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề:*

a) Trong một hình vuông hai đường chéo vuông góc với nhau.
b) Quả đất xoay xung quanh mặt trăng.
c) Số x lớn hơn 5.

Giải: a) Câu này là một mệnh đề. Nó là một khẳng định đúng.
b) Câu này là một mệnh đề. Nó là một khẳng định sai.
c) Câu này không phải là một mệnh đề vì x chưa biết cụ thể là số nào.

Dạng 2: ***Mệnh đề phủ định.***

Bài 1: *Phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng:*

a) A = *"7 là số nguyên tố".* *b)* B = *"5 > 8".*

Giải:

a) $\overline{A}$ = "7 không phải là số nguyên tố": A đúng, $\overline{A}$ sai.

b) $\overline{B}$ = "5 $\leq$ 8": B sai, $\overline{B}$ đúng.

Chú ý: Mệnh đề phủ định của B không phải là mệnh đề "5 < 8".

Dạng 3: ***Mệnh đề kéo theo.***

Bài 1: *Lập mệnh đề* A $\Rightarrow$ B *và xét tính đúng sai của mệnh đề đó, với:*

a) A = *"Số nguyên dương a tận cùng bằng chữ số 5";*
B = *"Số nguyên dương a chia hết cho 5".*
b) A = *"3 < 4";* B = *"π < 3,14".*
c) A = *"12 chia hết cho 6";* B = *" 12 chia hết cho 3".*
d) A = *"Tam giác là hình vuông";* B = *"hình tròn là hình chữ nhật".*

Giải:

a) A $\Rightarrow$ B = "Nếu số nguyên dương a tận cùng bằng chữ số 5 thì a chia hết cho 5".

Mệnh đề này đúng.

b) $A \Rightarrow B$ = "Nếu $3 < 4$ thì $\pi < 3,14$". Mệnh đề này sai vì A là mệnh đ
đúng, còn B là mệnh đề sai.

c) $A \Rightarrow B$ = "Nếu 12 chia hết cho 6 thì 12 chia hết cho 3". Mệnh đề nà
đúng vì A là mệnh đề đúng và B cũng là mệnh đề đúng.

d) $A \Rightarrow B$ = "Nếu tam giác là hình vuông thì hình tròn là hình chữ nhật"
Mệnh đề này đúng vì A là mệnh sai và B cũng là mệnh đề sai.

Chú ý:

– Cách lập mệnh đề $A \Rightarrow B$ là: *nếu* A *thì* B.

– Đối với mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$: nếu B đúng thì $A \Rightarrow B$ đúng; nhưn
khi B sai thì ta chưa thể kết luận gì về tính đúng sai của nó (còn phụ thuộ
vào tính đúng sai của A). Chẳng hạn: mệnh đề ở câu c), ta chỉ cần nhậ
xét là mệnh đề B đúng cũng đủ để kết luận rằng $A \Rightarrow B$ đúng.

– Ta chỉ chủ yếu xét mệnh đề $A \Rightarrow B$ với A là mệnh đề đúng.

Bài 2: *Cho mệnh đề: "Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau"*

*a) Phát biểu mệnh đề trên sử dụng các khái niệm "điều kiện cần", "điề
kiện đủ".*

*b) Phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề trên và xét tính đúng sai củ
mệnh đề đảo.*

Giải:

a) Mệnh đề trên là mệnh đề $A \Rightarrow B$, với:
A = "Tứ giác T là hình thoi"; B = "Tứ giác T có hai đường chéo vuông gó
với nhau".

Vì vậy:

Tứ giác T là hình thoi là điều kiện đủ để T có hai đường chéo vuông gó
với nhau.

Tứ giác T có hai đường chéo vuông góc với nhau là điều kiện cần để T
là hình thoi.

b) Mệnh đề đảo: "Nếu tứ giác T có hai đường chéo vuông góc vớ
nhau thì tứ giác T là hình thoi" hoặc "Tứ giác có hai đường chéo vuông gó
với nhau là hình thoi".

Mệnh đề này sai vì có những tứ giác có hai đường chéo vuông gó
nhưng không phải là hình thoi.

Chú ý:

– Để làm bài tập dạng này ta cần phải xác định được A và B (hay là giả
thiết và kết luận của định lí), khi đó: A là *điều kiện đủ* để có B; B là *điều
kiện cần* để có A.

– Mệnh đề đảo có dạng: *nếu* B *thì* A.

Dạng 4: ***Mệnh đề tương đương.***

Bài 1: *Lập mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ và xét tính đúng sai của mệnh đề đó, với:*

a) A = *"Số nguyên dương a chia hết cho 5";*
B = *"Số nguyên dương a tận cùng bằng chữ số 0 hoặc 5".*

b) A = *"Tổng a + b của hai số nguyên a, b chia hết cho 7";*
B = *"Hai số nguyên a, b cùng chia hết cho 7".*

Giải:

a) $A \Leftrightarrow B$ = "Số nguyên dương a chia hết cho 5 khi và chỉ khi a tận cùng bằng chữ số 0 hoặc 5". Đây là mệnh đề đúng (Dấu hiệu chia hết cho 5).

b) $A \Leftrightarrow B$ = " Tổng a + b của hai số nguyên a, b chia hết cho 7 khi và chỉ khi a, b cùng chia hết cho 7". Đây là mệnh đề sai vì $A \Rightarrow B$ sai (a + b chia hết cho 7 thì không nhất thiết là cả a và b đều chia hết cho 7; chẳng hạn: 6 + 8 = 14 chia hết cho 7 nhưng cả 6 và 8 đều không chia hết cho 7).

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Các câu sau đây câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề:

a) Số 13 chia hết cho 5.
b) Lăng Chủ tịch Hồ Chí Minh ở thành phố Hà Nội.
c) Thời tiết hôm nay đẹp làm sao!
d) Số chẵn là số chia hết cho 2.
e) $2x + 3 = 5$.
f) Hai đường thẳng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì song song.
g) $2 > 2$.
h) Số 124 có chia hết cho 7 không?
i) Hai góc đối đỉnh thì bù nhau.
j) a là bội số của b.

Bài 2: Phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng:

a) $2 < 3$.
b) $5 + 2 = 8$.
c) Các đường chéo của hình chữ nhật không bằng nhau.
d) London là thủ đô của nước Pháp.
e) 5 không phải là bội của 3.
f) Phương trình $x^2 - 5x + 6 = 0$ có nghiệm.
g) Tiếp sau mùa thu là mùa xuân.
h) Số 169 không phải là số chính phương.
i) $\sqrt{7}$ là số hữu tỉ.

Bài 3: Lập mệnh đề $A \Rightarrow B$ và mệnh đề đảo $B \Rightarrow A$, đồng thời xét tính đúng sai của các mệnh đề đó, với:

a) A ="Số nguyên a chia hết cho 9"; B ="Số nguyên a chia hết cho 3".
b) A ="Hai tam giác bằng nhau"; B ="Hai tam giác có diện tích bằng nhau"
c) A ="a là số lẻ"; B ="a là số nguyên tố lớn hơn 2".
d) A ="Tam giác ABC đều"; B ="Số đo của góc A là 60^{o}".
e) A ="M và M' đối xứng nhau qua đường thẳng d";
B ="Khoảng cách từ M và M' đến d bằng nhau".
f) A ="75 chia hết cho 3"; B ="75 chia hết 6".
g) A ="Hai đường thẳng $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ song song với nhau";
B ="$a = a'$, $b \neq b'$ ".

Bài 4: Phát biểu các mệnh đề sau sử dụng các khái niệm "điều kiện cần", "điều kiện đủ":

a) Nếu số nguyên dương a tận cùng bằng chữ số 0 thì nó chia hết cho 5.
b) Nếu tam giác có góc vuông thì tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh lớn nhất.
c) Trong một đường tròn, dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.
d) Với hai biểu thức A, B mà $B \geq 0$: nếu $A \geq 0$ thì $\sqrt{A^2B} = A\sqrt{B}$.
e) Trong một tam giác vuông, bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền.
f) Nếu $x = 3$ thì $x^2 = 9$.
g) Nếu $a + b > 2$ thì trong hai số a, b phải có một số lớn hơn 1.
h) Nếu tứ giác nội tiếp một đường tròn thì tổng hai góc đối của nó bằng 2v.

Bài 5: Phát biểu các mệnh đề trong bài 4 sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ" (nếu có thể).

§2. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Mệnh đề chứa biến p(x) không phải là một mệnh đề, nhưng với mỗi giá trị của biến x (thuộc một tập X nào đó) thì ta thu được một mệnh đề.

2. Mệnh đề ∀x∈X: p(x):

+ đúng nếu p(x) là mệnh đề đúng với tất cả x∈X.

+ sai nếu có ít nhất một x_0∈X sao cho $p(x_0)$ là mệnh đề sai.

3. Mệnh đề ∃x∈X: p(x):

+ sai nếu p(x) là mệnh đề sai với tất cả x∈X.

+ đúng nếu có ít nhất một x_0∈X sao cho $p(x_0)$ là mệnh đề đúng.

4. Từ 2 và 3, ta có:

+ A = "∀x∈X: p(x)" ⇒ $\overline{A}$ = "∃x∈X: $\overline{p(x)}$"

+ A = "∃x∈X: p(x)" ⇒ $\overline{A}$ = "∀x∈X: $\overline{p(x)}$"

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Lập các mệnh đề từ một mệnh đề chứa biến.***

Bài 1: Cho mệnh đề chứa biến: p(x) = "x là số nguyên tố" (x∈ℕ)

a) Phát biểu các mệnh đề sau thành lời và xét tính đúng sai của chúng: p(2); p(6); p(7); p(28); p(125).

b) Phát biểu các mệnh đề và xét tính đúng sai của chúng: ∀x∈X: p(x); ∃x∈X: p(x).

Giải:

a) p(2) = "2 là số nguyên tố": đúng.
p(6) = "6 là số nguyên tố": sai.

p(7) = "7 là số nguyên tố": đúng.
p(28) = "28 là số nguyên tố": sai.
p(125) = "125 là số nguyên tố": sai.

b) $\forall x \in X$: p(x) = "Mọi số tự nhiên x đều là số nguyên tố": sai.
$\exists x \in X$: p(x) = "Có số tự nhiên x là số nguyên tố": đúng.

Dạng 2: ***Mệnh đề chứa các kí hiệu $\forall$, $\exists$.***

Bài 1: Dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Mọi số thực cộng với 0 đều bằng chính nó.
b) Có số thực không chia hết cho 5.
c) Mọi số thực khác 0 nhân với nghịch đảo của nó đều bằng 1.
d) Mọi số thực luôn có một số thực để tổng của chúng bằng 0.

Giải:

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x + 0 = x$; c) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0: x.\frac{1}{x} = 1$.

b) $\exists x \in \mathbb{R}$: x không chia hết cho 5. d) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}: x + y = 0$.

Bài 2: Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề, xét tính đúng sai của chúng và phát biểu các mệnh đề phủ định đó thành lời.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$: 2n + 1 là số lẻ. b) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 = 0$.

Giải:

a) Mệnh đề phủ định: $\exists n \in \mathbb{N}$: 2n + 1 là số chẵn: sai.

Phát biểu thành lời: "Có số tự nhiên n: 2n + 1 là số chẵn".
b) Mệnh đề phủ định: $\forall x: x^2 + 1 \neq 0$: đúng.
Phát biểu thành lời: "Với mọi số thực x: $x^2 + 1$ khác 0".

Dạng 3: ***Chứng minh mệnh đề chứa kí hiệu $\forall$, $\exists$.***

Phương pháp:

- Để chứng minh mệnh đề "$\exists x \in X$: p(x)", ta cần chỉ ra một phần tử $x_0 \in X$ sao cho $p(x_0)$ là mệnh đề đúng.
- Để chứng minh mệnh đề "$\forall x \in X$: p(x)", ta cần chứng tỏ rằng p(x) trở thành mệnh đúng với tất cả phần tử $x \in X$. Vì vậy, ta sẽ chứng tỏ p(x) là mệnh đề đúng với phần tử bất kì $x \in X$.

Bài 1: Chứng minh:

a) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 - 3x + 2 = 0$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 1 \geq 1$.

Giải:

a) Ta có: với x = 1 thì $x^2 - 3x + 2 = 0$. Vậy mệnh đề ở bài a) đúng.

b) Với $x \in \mathbb{R}$ bất kì, ta luôn có: $x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$. Vậy mệnh đề ở bài b) đúng.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Cho mệnh đề chứa biến: p(x) ="x là số chẵn" ($x \in \mathbb{N}$).

a) Phát biểu các mệnh đề sau thành lời và xét tính đúng sai của chhúng: p(2); p(17); p(204); p(2006); p(12575).

b) Phát biểu các mệnh đề và xét tính đúng sai của chúng: $\forall x \in X: \neg p(x)$; $\exists x \in X: p(x)$.

Bài 2: Dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Có số hữu tỉ x: $3x - 6 = 0$.
b) Với mọi số thực x: $x^2 + x + 1 = 0$.
c) Với mọi số tự nhiên n: $n^2 > n$.
d) Có số tự nhiên n: $2^n - 1$ là số nguyên tố.
e) Với mọi số thực x: $|x| > 0$.
f) Có số thực x: $|x| = 0$.
g) Mọi tam giác vuông là tam giác cân.
h) Có hình thang là hình bình hành.
i) Trong mọi đường tròn, đường kính là dây cung lớn nhất.

Bài 3: Cho mệnh đề chứa biến: q(y) = "2006 + y = 2009" ($y \in \mathbb{R}$). Hãy ddùng kí hiệu để viết các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng:

a) $2006 + 3 = 2009$.
b) $2006 + 2,7 = 2009$.
c) $2006 - \frac{3}{2} = 2009$.
d) Có số thực y: $2006 + y = 2009$.
e) Với mọi số thực y: $2006 + y = 2009$.

Bài 4: Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề, xét tính đúng sai (của chúng và phát biểu các mệnh đề phủ định đó thành lời:

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x + 5 > 7$.
b) $\exists n \in \mathbb{N}$: 15 là bội của n.
c) $\exists x \in \mathbb{R}: |x| = 0$.
d) $\forall x \in \mathbb{R}: x + 3 = 3 + x$.
e) $\exists x \in \mathbb{R}: x^2 + 4x - 5 = 0$.

Bài 5: Trước các mệnh đề chứa biến sau đây, hãy đặt một kí hiệu $\exists$ hooặc $\forall$ để được một mệnh đề đúng ($x \in \mathbb{Q}$):

a) $2x + 3 = 6$.
b) $5.x = x.5$.
c) $x^2 + 2x + 3 > 0$.
d) x chia hết cho 5.

Bài 6: Chứng minh:

a) $\exists n \in \mathbb{N}$: $2^{2^n} + 1$ là số nguyên tố. b) $\forall x \in \mathbb{R}: (x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.

c) Chứng minh mệnh đề d) trong **Bài 2**.

d) $\forall n \in \mathbb{N}$: n^2 chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1.

§3. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Chứng minh mệnh đề A $\Rightarrow$ B bằng phản chứng ta làm các bước sau:

a) Giả sử A đúng, B sai:

b) Từ các giả thiết trên suy ra A sai. Ta được mâu thuẫn (A vừa đúng, vừa sai).

c) Kết luận A $\Rightarrow$ B đúng.

2. Để chứng minh mệnh đề P bằng phản chứng ta làm các bước sau:

a) Giả sử P sai.

b) Từ P sai suy ra một mâu thuẫn (một mệnh đề vừa đúng, vừa sai)

c) Kết luận P đúng.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Chứng minh mệnh đề: A $\Rightarrow$ B bằng phản chứng.***

Bài 1: Chứng minh rằng: Nếu n^2 ($n \in \mathbb{Z}$) là số lẻ thì n là số lẻ.

Giải:

Giả sử n^2 là số lẻ nhưng n là số chẵn.

Khi đó: $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) $\Rightarrow n^2 = 4k^2$ là môt số chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết n^2 là số lẻ.

Vậy ta có điều phải chứng minh (đpcm).

Bài 2: Chứng minh rằng: Nếu $p > 1$ là ước nhỏ nhất của số tự nhiên $a > 1$ thì p là số nguyên tố.

Giải: Giả sử $p > 1$ là ước nhỏ nhất của số tự nhiên $a > 1$ nhưng p không là số nguyên tố.

Khi đó: $p > 1 \Rightarrow$ p là hợp số $\Rightarrow$ p có ước p_1 sao cho: $1 < p_1 < p$. Vì p là ước của a và p_1 là ước của p nên p_1 là ước của a. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $p > 1$ là ước nhỏ nhất của a.

Vậy ta có điều phải chứng minh (đpcm)

Dạng 2: ***Chứng minh một mệnh đề P bằng phản chứng.***

Bài 3: Chứng minh rằng: "Không có một số nguyên tố nào là lớn nhất".

Giải:

Giả sử có số nguyên tố lớn nhất là p.

Ta lập số: $q = 1.2.3...p + 1$, ta có: $q > 1$ nên q có ít nhất một ước là số nguyên tố (là ước nhỏ nhất lớn hơn 1, theo chứng minh ở Bài 2), đồng thời $q > p$. Vì $1.2.3...p$ chia hết cho mọi số nguyên tố không lớn hơn p nên nếu chia q cho các số nguyên tố không lớn hơn p, bao giờ ta cũng có số dư là 1. Từ đó suy ra q là số nguyên tố hoặc q có ước nguyên tố lớn hơn p. Điều này mâu thuẫn với giả thiết p là số nguyên tố lớn nhất.

Vậy ta có điều phải chứng minh (đpcm).

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Cho $n \in \mathbb{Z}$, chứng minh rằng:

a) Nếu $7n + 1$ là số chẵn thì n là số lẻ.
b) Nếu $n^3 + 2$ là số lẻ thì n là số lẻ.

Bài 2: Chứng minh rằng:
a) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
b) Nếu một tứ giác có tổng các góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp một đường tròn.

Bài 3: Chứng minh rằng:
c) Nếu tổng của hai số nguyên là một số chẵn thì trong hai số đó cùng chẵn hoặc cùng lẻ.
d) Nếu tích của hai số nguyên là một số lẻ thì trong hai số đều là số lẻ.
e) Nếu tích của hai số nguyên là một số lẻ thì tổng của hai số nguyên đó là một số chẵn.

Bài 4: Giả sử phương trình bậc hai: $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm. Chứng minh rằng:

a) Nếu $-\frac{b}{a} < 0$ thì trong hai nghiệm của phương trình có ít nhất một nghiệm âm.

b) Nếu $-\frac{b}{a} > 0$ thì trong hai nghiệm của phương trình có ít nhất một nghiệm dương.

c) Nếu $\frac{c}{a} > 0$ thì hai nghiệm của phương trình cùng dấu.

d) Nếu $\frac{c}{a} < 0$ thì hai nghiệm của phương trình khác dấu.

Bài 5:

a) Không có số hữu tỉ nào bình phương lên bằng 2.
b) Không có một tứ giác lồi nào có 4 góc nhọn.

§4. TẬP HỢP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tập hợp (tập) là một khái niệm cơ bản của Toán học.

Phần tử a thuộc tập A, ta viết: $a \in A$.

Phần tử a không thuộc A, ta viết: $a \notin A$.

2. Tập hợp rỗng, kí hiệu $\varnothing$, *là tập không chứa phần tử nào.*

3. Tập hợp con: nếu mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của tập B thì A là tập con của B, kí hiệu: $A \subset B$: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$.

Tính chất: * $\forall A$: $A \subset A$;

* $A \subset B$; $B \subset C \Rightarrow A \subset C$;

* $\forall A$: $\varnothing \subset A$.

4. Tập hợp bằng nhau: $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: *Xác định tập hợp.*

Phương pháp:

1) Liệt kê các phần tử của nó.

2) Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

Chú ý: Ta thường sử dụng phương pháp liệt kê khi số phần tử của tập là hữu hạn.

Bài 1: Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp:

a) $A = \{x \in \mathbb{N}$ / x là ước của 15$\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N}$ / x là số nguyên tố và $x < 26\}$.

Giải:

a) $A = \{1; 3; 5; 15\}$;

b) $B = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23\}$.

Bài 2: Tìm tính chất đặc trưng xác định các phần tử của tập hợp.

a) $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$.

b) $B = \{\frac{2}{3}; \frac{3}{8}; \frac{4}{15}; \frac{5}{24}; \frac{6}{35}\}$.

c) $C = \{6; 24; 60; 120; 210\}$.

Giải:

a) $A = \{2n \,/\, n \in \mathbb{N}$ và $1 \le n \le 5\}$

b) $B = \{\frac{n}{n^2 - 1} \,/\, n \in \mathbb{N}$ và $2 \le n \le 5\}$

c) $C = \{n(n+1)(n+2) \,/\, n \in \mathbb{N}$ và $1 \le n \le 5\}$

Chú ý: Có những tập hợp ta có thể nêu tính đặc trưng bằng nhiều cách, chẳng hạn:

$A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ là số chẵn và $2 \le n \le 10\}$ hoặc $A = \{2+2n \,/\, n \in \mathbb{N}$ và $0 \le n \le 4\}$......

Dạng 2: *Chứng minh* $A \subset B$.

Phương pháp: Chứng minh $A \subset B$:

- Cách 1: Lấy x bất kì: $x \in A$. Chứng minh: $x \in B$.
- Cách 2: Liệt kê các phần tử của A và B.

Bài 1: Cho các tập: $A = \{n \in \mathbb{N} \,/\, n$ là bội của $6\}$; $B = \{m \in \mathbb{N} \,/\, m$ là bội của $3\}$.

Chứng minh: $A \subset B$.

Giải:

Lấy x bất kì: $x \in A \Rightarrow x$ là bội của $6 \Rightarrow x = 6k = 3.(2k)$ $(k \in \mathbb{N}) \Rightarrow x$ là bội của 3

$\Rightarrow x \in B$. Vậy $A \subset B$.

Bài 2: Cho các tập: A = Tập hợp các hình vuông; B = Tập hợp các hình thoi.
Chứng minh: $A \subset B$.

Giải:

Ta có: Một hình vuông là một hình thoi (vì có các cạnh bằng nhau) nên $A \subset B$.

Bài 3: Cho các tập: $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x^2 - x - 2 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, -2 < x \le 3\}$

Giải:

Bằng cách liệt kê, ta có: $A = \{-1; 2\}$; $B = \{-1; 0; 1; 2; 3\} \Rightarrow A \subset B$.

Dạng 3: *Chứng minh* $A = B$.

Phương pháp: – Cách 1: Chứng minh: $A \subset B$ và $B \subset A$.
– Cách 2: Liệt kê các phần tử của A và B.

Bài 1: Cho các tập: $A = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ là bội của 2 và $3\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x$ là bội của $6\}$.
Chứng minh: $A = B$.

Giải:

* Chứng minh: $A \subset B$: $x \in A \Rightarrow x$ là bội của 2 và $3 \Rightarrow x = 2k = 3l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow k \vdots 3 \Rightarrow k = 3l_1$ $(l_1 \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = 2.3l_1 = 6l_1 \Rightarrow x$ là bội của $6 \Rightarrow x \in B$. Vậy $A \subset B$.

* Chứng minh: $B \subset A$: $x \in B \Rightarrow x$ là bội của $6 \Rightarrow x = 6k = 2.3k = 3.2k$ $(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ x là bội của 2 và $3 \Rightarrow x \in A$. Vậy $B \subset A$.

Từ đó: $A = B$.

Bài 2: Cho các tập: $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x$ là ước thực sự của $4\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \,/\, 0 < x < 3\}$.

Giải:

Liệt kê: $A = \{1; 2\}$; $B = \{1; 2\} \Rightarrow A = B$.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Hãy liệt kê các phần tử của các tập hợp:

a) $A = \{x \in \mathbb{N} / x + 3 \leq 10\}$.

b) $B = \{x \in \mathbb{N}$ / x là ước của 18$\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{N}$ / x chia hết cho 3 và $3 < x \leq 21\}$.

d) D = Tập các ước chung của 20 và 45.
e) E = Tập các nghiệm của phương trình $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.
f) F = Tập các nghiệm của phương trình $4x^2 - 4x + 3 = 0$.
g) G = Tập các nghiệm nguyên của phương trình $2x^2 - 11x + 5 = 0$.

Bài 2: Tìm tính chất đặc trưng xác định các phần tử của tập hợp:
a) $A = \{2; 7; 12; 17; 22; 27\}$. b) $B = \{1; 8; 27; 64; 125\}$.

c) $C = \{\frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}; \frac{1}{42}\}$. d) $D = \{1; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 2; \sqrt{5}\}$.

e) E = Tập các số thực lớn hơn −2 và không lớn hơn 3.
f) F = Tập các điểm M thuộc đường tròn tâm O, bán kính R.

Bài 3: Trong các tập hợp sau, tập nào là con của tập nào?

a) Tập hợp $\mathbb{N}$ các số tự nhiên, tập hợp $\mathbb{Z}$ các số nguyên, tập hợp $\mathbb{Q}$ các số hữu tỉ, tập hợp $\mathbb{R}$ các số thực.

b) Tập hợp A các hình tứ giác, tập hợp B các hình vuông, tập hợp C các hình chữ nhật, tập hợp D các hình bình hành, tập hợp E hợp các hình thang.

Bài 4: Cho các tập: $A = \{9k + 7 / k \in \mathbb{Z}\}$;

$B = \{3k + 1 / k \in \mathbb{Z}\}$.

Chứng minh: $A \subset B$.

Bài 5: Cho các tập: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 = 0\}$;

$B = \{x \in \mathbb{N}$ / x là ước của 6$\}$;

Chứng minh: $A \subset B$.

Bài 6: Cho các tập: $A = \{n \in \mathbb{N} / n + m = 7, m \in \mathbb{N}\}$;

$B = \{m \in \mathbb{N} / n + m = 7, n \in \mathbb{N}\}$.

Chứng minh rằng: A = B.

Bài 7: Cho $a, b \in \mathbb{N}$; d = ƯCLN(a; b) và các tập:

A = Tập các ước chung của 2 số tự nhiên a và b;

B = Tập các ước của d.

Chứng minh rằng: A = B.

Bài 8: Cho a, b$\in\mathbb{N}$; m = BCNN(a; b) và các tập:

A = Tập các bội chung của 2 số tự nhiên a và b;
B = Tập các bội của m.

Chứng minh rằng: A = B.

§5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP. CÁC TẬP HỢP SỐ.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Giao của hai tập hợp:* $A \cap B = \{x \,/\, x\in A \text{ và } x\in B\}$;

$$x\in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases};$$

2. *Hợp của hai tập hợp:* $A \cup B = \{x \,/\, x\in A \text{ hoặc } x\in B\}$;

$$x\in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.;$$

3. *Hiệu và phần bù:* $A \setminus B = \{x \,/\, x\in A \text{ và } x\notin B\}$;

$$x\in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases};$$

Khi $B \subset A$ *thì* $A \setminus B$ *gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu:* C_AB.

4. *Các tập hợp số đã học:*

* *Tập hợp các số tự nhiên:* $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3;\ldots\}$.

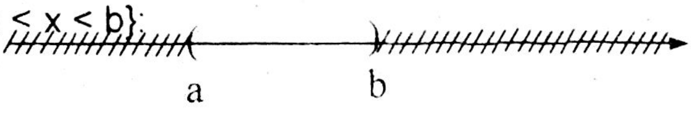
* *Tập hợp các số nguyên:* $\mathbb{Z} = \{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$.

* *Tập hợp các số hữu tỉ* $\mathbb{Q}$: *Các số hữu tỉ có dạng* $\frac{a}{b}$, *a, b* $\in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ *với định nghĩa:* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$. *Các số hữu tỉ cũng biểu diễn được dưới dạng số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.*

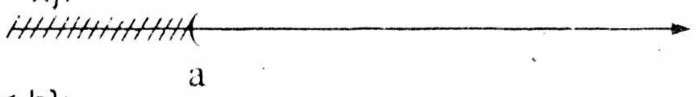
* *Tập hợp các số thực* $\mathbb{R}$: *Các số thực là các số thập phân hữu hạn, vô hạn tuần hoàn và vô hạn không tuần hoàn. Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn gọi là số vô tỉ.*

5. *Các tập con thường gặp của* $\mathbb{R}$:

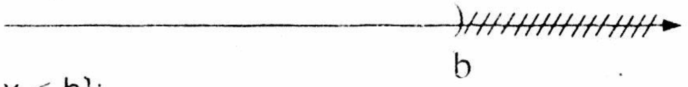
* *Khoảng:* $(a; b) = \{x\in\mathbb{R} \,/\, a < x < b\}$;



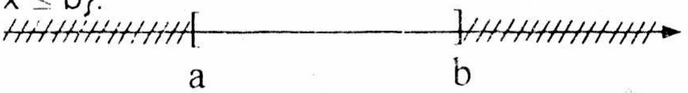
$(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x\}$:



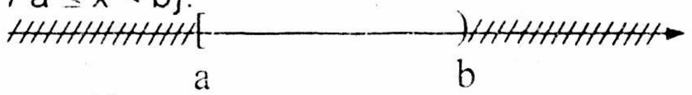
$(-\infty; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < b\}$:



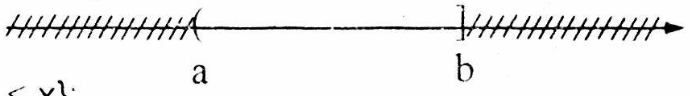
* *Đoạn:* $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$:



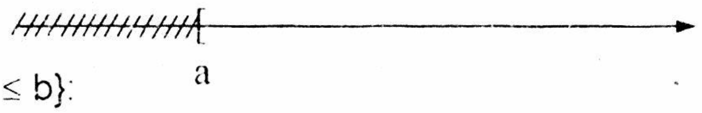
* *Nửa khoảng:* $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$:



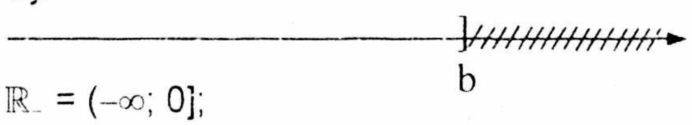
$(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$:



$[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x\}$:



$(-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \leq b\}$:



* $\mathbb{R} = (-\infty; +\infty)$; $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$; $\mathbb{R}_- = (-\infty; 0]$;

$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\}$; $\mathbb{R}_+^* = (0; +\infty)$; $\mathbb{R}_-^* = (-\infty; 0)$;

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Thực hiện các phép toán trên hai tập hợp cho trước.***

Phương pháp: Dùng định nghĩa các phép toán.

Bài 1: *Xác định* $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ *trong các trường hợp sau:*

a) $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq 1\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / \ x < 5\}$.

Giải:

a) $A \cap B = \{2; 4\}$;
$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 10; 12\}$;
$A \setminus B = \{1; 3; 5\}$;
$B \setminus A = \{6; 8; 10; 12\}$;

b) * $x \in A \cap B \Rightarrow x \in A$ và $x \in B \Rightarrow x \geq 1$ và $x < 5 \Rightarrow A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / \ 1 \leq x < 5\}$;

* $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A$ hoặc $x \in B \Rightarrow x \geq 1$ hoặc $x < 5 \Rightarrow A \cup B = \mathbb{R}$;

* $x \in A \setminus B \Rightarrow x \in A$ và $x \notin B \Rightarrow x \geq 1$ và $x \geq 5 \Rightarrow A \setminus B = \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq 5\}$;

* $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ và $x \notin A \Rightarrow x < 5$ và $x < 1 \Rightarrow B \setminus A = \{x \in \mathbb{R} / \ x < 1\}$;

Chú ý: $x \notin A$ là mệnh đề phủ định của mệnh đề $x \in A$.

Dạng 2: ***Sử dụng các phép toán của tập hợp để tìm tập nghiệm của phương trình, hệ phương trình.***

Phương pháp: Gọi A, B lần lượt là tập nghiệm của các phương trình:

$$f(x) = 0;\ g(x) = 0.$$

Khi đó: – Tập nghiệm của phương trình: $f(x).g(x) = 0$ là $A \cup B$;

– Tập nghiệm của phương trình: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ là $A \setminus B$;

– Tập nghiệm của hê phương trình: $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ là $A \cap B$.

Bài 2: *Giải các phương trình, hệ phương trình sau:*

a) $(3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$.

b) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 10} = 0$.

c) $\begin{cases} -2x^2 + 9x - 7 = 0 \\ \dfrac{2x - 7}{x - 1} = 0 \end{cases}$

Giải:

a) * Giải PT: $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{2}{3}$. Tập nghiệm: $A = \{-\dfrac{2}{3}\}$;

* Giải PT: $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3;\ x = 4$. Tập nghiệm: $B = \{3; 4\}$;

Vậy tập nghiệm của PT: $(3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$ là $A \cup B = \{-\dfrac{2}{3}; 3; 4\}$.

b) * Giải PT: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = 2$. Tập nghiệm: $A = \{1; 2\}$;

* Giải PT: $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = 2;\ x = 5$. Tập nghiệm: $B = \{2; 5\}$;

Vậy tập nghiệm của PT: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 7x + 10} = 0$ là $A \setminus B = \{1\}$.

c) * Giải PT: $-2x^2 + 9x - 7 = 0 \Rightarrow x = 1;\ x = \dfrac{7}{2}$. Tập nghiệm: $A = \{1; \dfrac{7}{2}\}$;

* Giải PT: $\dfrac{2x - 7}{x - 1} = 0$ (xem cách giải như câu b) $\Rightarrow x = \dfrac{7}{2}$. Tập nghiệm: $B = \{\dfrac{7}{2}\}$;

Vậy tập nghiệm của hệ PT: $\begin{cases} -2x^2 + 9x - 7 = 0 \\ \dfrac{2x - 7}{x - 1} = 0 \end{cases}$ là $A \cap B = \{\dfrac{7}{2}\}$.

Dạng 3: ***Chứng minh một số tính chất liên quan đến tập hợp và các phép tính trên tập hợp.***

Phương pháp: Dùng các định nghĩa các phép toán và các phương pháp chứng minh $A \subset B$; $A = B$ đã đề cập ở §4.

Bài 3: *Chứng minh rằng: Với A, B, C là các tập hợp:*

a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

b) $(A \setminus B) \setminus C \subset A \setminus C$.

Giải:

a) $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in B \\ x \in C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \in C \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Vậy $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

b) $x \in (A \setminus B) \setminus C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \setminus B \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ x \notin C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin C \end{cases} \Leftrightarrow x \in A \setminus C$.

Vậy $(A \setminus B) \setminus C \subset A \setminus C$.

Dạng 4: ***Xác định các tập hợp và biểu diễn trục số.***

Phương pháp: *Sử dụng các phép toán và cách biểu diễn các tập nêu trên.*

Bài 4: *Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:*

a) $(2; 5) \cap (3; 7]$;

b) $[-\frac{1}{2}; 2] \cup [-1; 1)$;

c) $(-4; 13) \cup (4; +\infty)$;

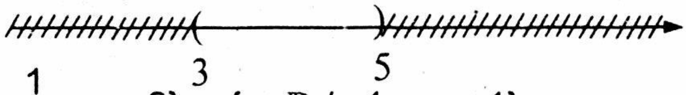
d) $(-3; 1] \setminus (2; 4)$;

Giải:

a) Ta có: $(2; 5) \cap (3; 7] = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2 < x < 5\} \cap \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x \le 7\}$

$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x < 5\}$

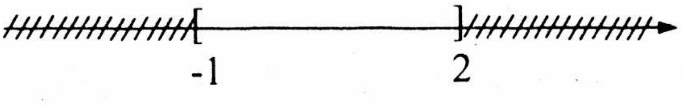
$\Rightarrow (2; 5) \cap (3; 7] = (3; 5)$:



b) $[-\frac{1}{2}; 2] \cup [-1; 1) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -\frac{1}{2} \le x \le 2\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \le x < 1\} =$

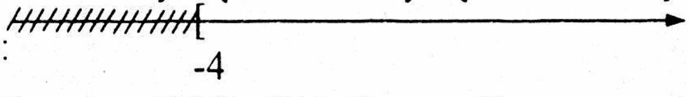
$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -1 \le x \le 2\}$

$\Rightarrow [-\frac{1}{2}; 2] \cup [-1; 1) = [-1; 2]$:



c) $[-4; 13) \cup (4; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -4 \le x < 13\} \cup \{x \in \mathbb{R} \,/\, 4 < x\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -4 \le x\}$

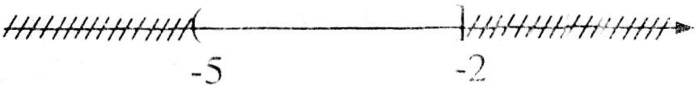
$\Rightarrow [-4; 13) \cup (4; +\infty) = [-4; +\infty)$:



d) $(-5; -1] \setminus (-2; 4) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x \le -1\} \setminus \{x \in \mathbb{R} \,/\, -2 < x < 4\} =$

$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, -5 < x \le -2\}$

$\Rightarrow (-5; -1] \setminus (-2; 4) = (-5; -2]$:



Chú ý: Để thuận tiện hơn trong việc thực hiện các phép toán trên các tập hợp ta nên biểu diễn các tập trên trục số.

C. BÀI TẬP

Bài 1: Cho các tập hợp: $A = \{1; 2; 3; 5; 8\}$; $B = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$;

$C = \{n + 1 / n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$;

a) Xác định $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus C$.
b) Xác định $A \cap (B \cup C)$; $A \cup B \cup C$; $A \setminus (B \cap C)$; $(A \setminus B) \setminus C$.
c) Chứng minh $A \cap C \subset B$. Xác định: $C_B(A \cap C)$.

Bài 2: Xác định $A \cap B$; $A \cup B$ biết:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 7\}$.

b) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x > 7\}$.

c) $A = \{x \in \mathbb{R} / x < 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 7\}$.

d) $A = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 7\}$.

e) $A = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 2\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \leq x < 7\}$.

Bài 3: a) Cho các tập $A = \{0; 1; 2; 3\}$, $B = \{0; 1; 2; 3; 5; 7\}$. Tìm tập C để $A \cup C = B$; tìm tập D để $B \cap D = A$;

b) Cho $A = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 3\}$. $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \leq x < 5\}$.

$C = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$. Tìm a, b để: (1) $C \subset A \cap B$.
(2) $A \cup B \subset C$.

Bài 4: Giải các phương trình, hệ phương trình sau:

a) $(x^2 + 5x + 4)(2x^2 - 7x + 6) = 0$.

b) $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{2x^2 + 7x - 9} = 0$.

c) $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 6x + 8}{2x^3 + 9x^2 - 2x - 9} = 0$.

d) $\begin{cases} (x-1)^2 + 7 = (x+4)^2 \\ (1+x)^2 + 3x^2 = (2x-1)^2 + 7 \end{cases}$

Bài 5: Cho A, B, C là các tập hợp. Chứng minh:
a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
b) $A \cap (A \cup B) = A$; $B \cup (A \cap B) = B$.
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
d) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Bài 6: Trong số 220 học sinh khối 10 có 163 bạn biết chơi bóng chuyền, 175 bạn biết chơi bóng bàn, còn 24 bạn không biết chơi môn bóng nào cả.Tìm số học sinh biết chơi cả hai môn bóng.

Bài 7: Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $[-2; 3) \cap (1; 4]$. b) $(-2; 3] \cap [1; 4)$.
c) $(-1; 4) \cap (0; 2)$. d) $[-1; 1] \cap [2; 3]$.
e) $[-4; 5) \cap (2; +\infty)$. f) $(-\infty; -2) \cap [-3; +\infty)$.
g) $[-2; 2) \cup (1; 2]$. h) $(-2; 2] \cup [1; 2)$.
i) $(-3; 3) \cup (0; 3)$. j) $[-1; 1] \cup [2; 3]$.
k) $[-4; 5) \cup (2; +\infty)$. l) $(-\infty; -2) \cup [-1; +\infty)$.
m) $(-3; 4) \setminus (1; 3)$. n) $(-3; 4) \setminus [1; 3)$.
o) $(-1; 4] \setminus [0; 2)$. p) $[-2; 2] \setminus (2; 3]$.
q) $(3; +\infty) \setminus (-1; 5]$. r) $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 2)$.

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

§1. MỆNH ĐỀ

Bài 1: Các câu a), b), d), f), g), i) là các mệnh đề.

Bài 2: a) $2 \geq 3$: sai; b) $5 + 2 \neq 8$: đúng.
e) London không phải là thủ đô của nước Pháp: đúng.
f) Tiếp sau mùa thu không là mùa xuân: đúng.

Bài 3: * Bạn đọc hãy lập các mệnh đề A ⇒ B. Các mệnh đề lập được từ câu c), f) sai.

* Các mệnh đề đảo bạn đọc tự lập với dạng: nếu B thì A.
Các mệnh đề lập được từ các câu c), f), g) đúng;
Các mệnh đề còn lại là sai (bạn đọc hãy chứng tỏ điều này).

Bài 4: e) A ="Tam giác vuông"
B ="Bình phương đường cao ứng với cạnh huyền bằng tích hai hình chiếu của hai cạnh góc vuông trên cạnh huyền".

Bài 5: Các mệnh đề có thể phát biểu được dưới dạng "điều kiện cần và đủ" là: b), c), d), h). Chẳng hạn:
g) "Tam giác có góc vuông là điều kiện cần và đủ để tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là trung điểm của cạnh lớn nhất".
h) Trong một đường tròn, dây gần tâm hơn là điều kiện cần và đủ để dây đó lớn hơn.

§2. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN

Bài 1: a) p(2) = "2 là số chẵn": đúng; p(17) = "17 là số chẵn": sai;
p(204) = "204 là số chẵn": đúng; p(2006) ="2006 là số chẵn": đúng;
p(12575) = "12575 là số chẵn": sai.
b) $\forall x \in X$: p(x) ="Mọi số tự nhiên đều là số chẵn": sai.
$\exists x \in X$: p(x) ="Có số tự nhiên là số chẵn": đúng.

Bài 2: a) $\exists x \in \mathbb{Q}: 3x - 6 = 0$. b) $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 = 0$.

c) $\forall n\in\mathbb{N}$: $n^2 > n$. d) $\exists n\in\mathbb{N}$: $2^n - 1$ là số nguyên tố.

e) $\forall x\in\mathbb{R}$: $|x| > 0$. f) $\exists x\in\mathbb{R}$: $|x| = 0$.

g) $\forall\triangle ABC$: $\triangle ABC$ là tam giác cân.

h) $\exists$hình thang ABCD: ABCD là hình bình hành.

i) $\forall$đường tròn (O): đường kính là dây cung lớn nhất.

Bài 3: a) q(3). b) q(2,7). c) $q(-\frac{3}{2})$.

d) $\exists y\in\mathbb{R}$: $2006 + y = 2009$. e) $\forall y\in\mathbb{R}$: $2006 + y = 2009$.

Bài 4: a) $\exists x\in\mathbb{R}$: $x + 5 \le 7$: đúng. b) $\forall n\in\mathbb{N}$: 15 không là bội của n: sai.

c) $\forall x\in\mathbb{R}$: $|x| \ne 0$: sai. d) $\exists x\in\mathbb{R}$: $x + 3 \ne 3 + x$: sai.

e) $\forall x\in\mathbb{R}$: $x^2 + 4x - 5 \ne 0$: sai.

Bạn đọc hãy tự phát biểu thành lời.

Bài 5: a) $\exists x\in\mathbb{Q}$: $2x + 3 = 6$. b) $\forall x\in\mathbb{Q}$: $5x = x5$

c) $\forall x\in\mathbb{Q}$: $x^2 + 2x + 3 > 0$. d) $\exists x\in\mathbb{Q}$: x chia hết cho 5.

Bài 6: Chứng minh:

a) Với n = 1: $2^{2^n} + 1 = 2^{2^1} + 1 = 5$ là số nguyên tố.

Chú ý: Các số có dạng: $2^{2^n} + 1$ ($n\in\mathbb{N}$) gọi là số *Phecma*.

Phecma đã đưa ra giả thuyết: "$\forall n\in\mathbb{N}$: $2^{2^5} + 1$ là số nguyên tố" ssau kh thử đúng với n = 0; 1; 2; 3; 4. Nhưng sau đó, Ơle đã chứng minh đượ $2^{2^5} + 1$ chia hết cho 641, nghĩa là giả thuyết Phecma sai.

b) Với $x\in\mathbb{R}$ bất kì, ta luôn có: $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$.

c) Với n = 2: $2^n - 1 = 4 - 1 = 3$ là số nguyên tố.

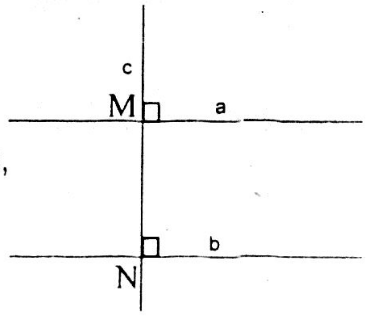
Chú ý: Các số nguyên tố có dạng: $2^n - 1$ ($n\in\mathbb{N}$) gọi là số nguyên tố *Mécxen*

d) Xét các trường hợp: n = 3k; n = 3k + 1; n = 3k + 2 ($k\in\mathbb{N}$).

§3. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

Bài 1: Bạn đọc tự làm.

Bài 2: a) Cho 3 đường thẳng a, b và c. Giả sử: $a \perp c$, $b \perp c$ nhưng $a \not\parallel b$.

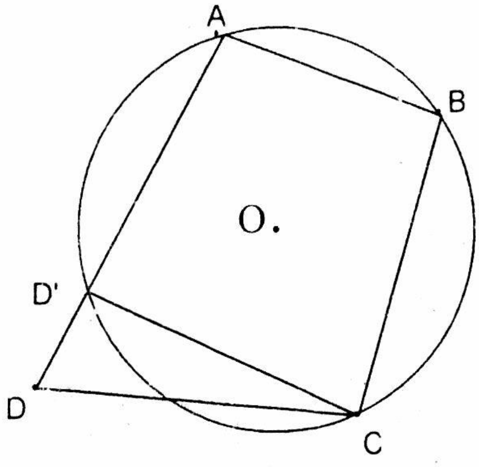


Khi đó: $a \nparallel b \Rightarrow \widehat{M} \neq \widehat{N}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\widehat{M} = \widehat{N} = 1v$.

b) Giả sử tứ giác ABCD có tổng các góc đối diện $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ nhưng tứ giác ABCD không nội tiếp đường tròn (hình vẽ).

Khi đó: đường tròn cắt AD tại D', ta có ABCD' nội tiếp trong (O)

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{D'} = 180^\circ$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ (Vì $\widehat{D} \neq \widehat{D'}$).



Bài 3: a) Giả sử $a = 2k$, $b = 2l + 1$ $(k, l \in \mathbb{Z})$:

$a + b = 2(k + l) + 1$ là số lẻ.

b) Giả sử trong 2 số có ít nhất một số chẵn ⇒ C/m tích 2 số là số chẵn.

c) Sử dụng các kết quả trên.

Bài 4: Gọi 2 nghiệm của phương trình là x_1, x_2. Theo định lí Vi–et, ta có:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1.x_2 = \frac{c}{a}.$$

Chú ý: Cần nhớ các kết quả này để xét dấu các nghiệm của phương trình bậc hai.

Bài 5: a) Giả sử có số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ ($p; q \in \mathbb{Z}$: phân số $\frac{p}{q}$ tối giản):

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$ (*) $\Rightarrow p^2$ là số chẵn ⇒ p là số chẵn (Bạn đọc tự chứng minh) $\Rightarrow p = 2k$.

Thay vào (*), ta có: $4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$ q là số chẵn. Điều này mâu thuẫn giả thiết phân số $\frac{p}{q}$ là tối giản.

b) Giả sử có tứ giác lồi ABCD có 4 góc nhọn. Khi đó:

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} < 360^\circ$. Mâu thuẫn vì tổng 4 góc trong của tứ giác là 360°.

§4. TẬP HỢP

Bài 1: a) $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. b) $B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$.

c) $C = \{6; 9; 12; 15; 18; 21\}$. d) $D = \{1; 5\}$.

e) $E = \{-2; -\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$ (HD: giải pt: $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$).

f) $F = \varnothing$ (Vì phương trình $4x^2 - 4x + 3 = 0$ vô nghiệm).

g) $G = \{5\}$.

Bài 2: a) $A = \{2 + 5n / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$. b) $B = \{n^3 / n \in \mathbb{N}, n \leq 5\}$.

c) $C = \{\frac{1}{n(n+1)} / n \in \mathbb{N}, 2 \le n \le 6\}$. d) $D = \{\sqrt{n} / n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le\le 5\}$.

e) $E = \{x \in \mathbb{R} / -2 < x \le 3\}$. f) $F = \{M / OM = R\}$.

Bài 3: a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. b) $B \subset C \subset D \subset E \subset A$.

Bài 4: $x \in A \Rightarrow x = 9k + 7 = 3(3k + 2) + 1 = 3l + 1$ $(l = 3k + 2) \Rightarrow x \in B$.

Bài 5: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 = 0\} = \{2; 3\}$.

$B = \{x \in \mathbb{N} / x$ là ước của $6\} = \{1; 2; 3; 6\}$. $\Rightarrow A \subset B$.

Bài 6: Ta có: $n = 7 - m$; với $n, m \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ m nhận các giá trị là các số tự nhiên từ 0 đến 7. $\Rightarrow A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
Tương tự: $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.
Vậy $A = B$.

Bài 7: * $x \in A \Rightarrow$ x là ước của a và x là ước của b, $x \le d$:

Ta có: $\exists q, r \in \mathbb{N}: d = xq + r$ $(0 \le r < x) \Rightarrow r = d - xq$.

Vì d và x đều là ước của a nên r là ước của a. Mặt khác: $0 \le r < x \le a \Rightarrow r = 0 \Rightarrow d = xq$ hay x là ước của $d \Rightarrow x \in B$.

* $x \in B \Rightarrow$ x là ước của d:

Ta lại có: d là ước của a $\Rightarrow$ x là ước của a; d là ước của b $\Rightarrow$ x là ước của b. Vậy x là ước chung của a và b $\Rightarrow x \in A$.

Bài 8: Bạn đọc tự làm.

§5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP - CÁC TẬP HỢP SỐ

Bài 1: Xác định $C = \{1; 2; 3; 4\}$.

a) $A \cap B = \{1; 2; 3\}$, $A \cup B = \{-1; 0; 1; 2; 3; 5; 8\}$,
$A \setminus B = \{5; 8\}$, $B \setminus C = \{-1; 0\}$.

b) $B \cup C = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\} \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{1; 2; 3\}$...

c) $A \cap C = \{1; 2; 3\} \subset B$; $C_B(A \cap C) = B \setminus (A \cap C) = \{-1; 0\}$.

Bài 2: a) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 2 \le x \le 7\}$; $A \cup B = \mathbb{R}$.

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x > 7\}$; $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \ge 2\}$.

c) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x < 7\}$; $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \le 7\}$.

d) $A \cap B = \varnothing$; $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \le 2$ hoặc $x \ge 7\}$.

e) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 0 \le x \le 2\}$; $A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x < 7\}$.

Bài 3: a) $C = \{0; 5; 7\}$.

D có chứa các phần tử 1; 2; 3 và D không chứa các phần tử 0; 5; 7, chẳng hạn: D = {1; 2; 3; 4; 6}, ta có $B \cap D = A$.

b) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / 1 \le x \le 3\}$: $C \subset A \cap B \Leftrightarrow a \ge 1; b \le 3$.

$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x < 5\}$: $A \cup B \subset C \Leftrightarrow a \le -3; b > 5$.

Bài 4: c) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x^3 + 8 - 3x(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 5x + 4) = 0$

$\Leftrightarrow x = -2; x = 1; x = 4.$

$2x^3 + 9x^2 - 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 - 1) + 9(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x + 9) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -1; x = 1; x = -\dfrac{9}{2}.$

Bài 5: b) * $x \in A \cap (A \cup B) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in A$;

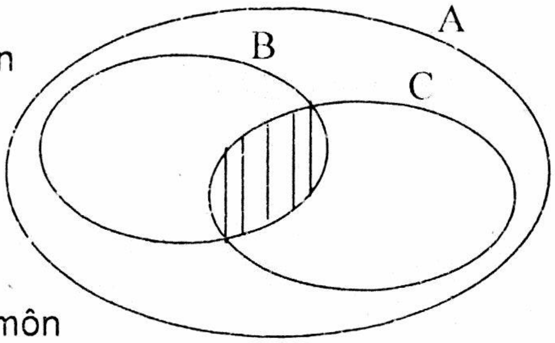
* $x \in A \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in A \cup B \end{cases} \Rightarrow x \in A \cap (A \cup B)$.

c) $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \in A \\ x \notin B \cup C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ \begin{cases} x \notin B \\ x \notin C \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases} \\ \begin{cases} x \in A \\ x \notin C \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C);$$

Bài 6: Gọi A: tập học sinh khối 10; B: tập học sinh khối 10 biết chơi bóng chuyền;

C. tập học sinh khối 10 biết chơi bóng bàn và a, b, c là số lượng học sinh tương ứng với từng tập trên. Ta có:



– Tập học sinh chơi được một môn hoặc cả hai môn bóng chuyền hoặc bóng bàn là: $B \cup C$, có số lượng là: a $-24 = 220 - 24 = 196$.

Mặt khác, ta thấy số lượng trên chính bằng tổng số học sinh chỉ biết chơi một trong hai môn bóng trên(xem hình vẽ).

Vậy số học sinh biết chơi cả hai môn bóng (số lượng của tập $B \cap C$) là:

$$163 + 175 - 196 = 142.$$

Bài 7: Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) (1; 3) b) [1; 3] c) (0; 2) d) ∅ e) (2; 5)

f) [−3; −2) g) [−2; 2] h) (−2; 2] i) (−3; 3) j) [−1; 3]

k) [−4; +∞) l) (−∞; +∞) m) (−3; 1] n) (−3; 1)

o) (−1; 0) ∪ [2; 4] p)[−2; 2] q) (5; +∞) r) [2; +∞)

Chương II HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

§1. HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

Cho $D \subset R$ và $D \neq \varnothing$

Hàm số f xác định trên D là một quy tắc cho tương ứng mỗi $x \in D$ với một và chỉ một số y

– D gọi là tập xác định (hay miền xác định) của hàm số f

– x gọi là biến số (hay đối số) và $x \in D$

– Số y tương ứng với mỗi giá trị của biến số x được gọi là giá trị của hàm số f tại x (hay tại điểm x), ký hiệu là f(x)

$$f:\quad D \longrightarrow R$$
$$x \longmapsto y = f(x)$$

2. Hàm số cho bằng công thức

Khi cho hàm số bởi công thức mà không chỉ rõ tập xác định của nó, thì ta có quy ước sau:

Tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

3. Đồ thị của hàm số

Định nghĩa: *Đồ thị của hàm số $f: D \longrightarrow R$ là tập hợp tất cả các điểm M(x, f(x)) trên mặt phẳng toạ độ với mọi $x \in D$.*

Đồ thị của hàm số y = f(x) là một đường (đường thẳng, đường cong,...).

y = f(x) là phương trình của đường đó.

4. Sự biến thiên của hàm số

a. Định nghĩa

y = f(x) đồng biến (tăng) trên (a;b) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b),\ x_1 \neq x_2$$

y = f(x) nghịch biến (giảm) trên (a;b) $\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

$$\forall x_1, x_2 \in (a;b),\ x_1 \neq x_2$$

b. Bảng biến thiên

– Khảo sát sự biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của nó.

– Kết quả khảo sát được tổng kết trong một bảng gọi là bảng biến thiên.

5. Tính chẵn, lẻ của hàm số

a. Định nghĩa

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

b. Đồ thị

– Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

– Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp:

– Muốn tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$, ta tìm các số x để biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

– Một số trường hợp cần nhớ:

Hàm số dạng	*Điều kiện để biểu thức f(x) có nghĩa*
$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ *u(x), v(x) là các đa thức theo x*	$v(x) \neq 0$
$f(x) = \sqrt{u(x)}$	$u(x) \geq 0$
$f(x) = \dfrac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$	$v(x) > 0$

Bài 1: *Tìm tập xác định của hàm số*

a. $y = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ b. $y = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$

c. $y = \dfrac{x+2}{x^2-4}$ d. $y = -x^2 + 5x - 3$

Giải:

a. Biểu thức $\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ có nghĩa khi ta thực hiện được phép chia.

Suy ra: $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ và $x \neq 2$

Tập xác định là $D = R \setminus \{1;2\}$

b. Ta có: $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1} = \dfrac{2x+1}{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}}$

Ta có: $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} \neq 0, \forall x \in R$

⇨Biểu thức $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ có nghĩa với mọi $x \in R$

Tập xác định $D = R$ hay $D = (-\infty; +\infty)$.

c. Biểu thức $\frac{x+2}{x^2-4}$ có nghĩa khi ta thực hiện được phép chia.

Suy ra: $x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ và $x \neq -2$.

Tập xác định $D = R \setminus \{2; -2\}$.

d. Biểu thức $-x^2 + 5x - 3$ có nghĩa với mọi $x \in R$.

Tập xác định D = R.

Bài 2: *Tìm tập xác định của hàm số*

a. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-3x}$ b. $y = \frac{2x+3}{\sqrt{1-x}}$ c. $y = \frac{1}{\sqrt{xx} - 1}$

Giải:

a. Biểu thức $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-3x}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 5 - 3x \geq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{3}$$

Tập xác định $D = [1; \frac{5}{3}]$.

b. Biểu thức $\frac{2x+3}{\sqrt{1-x}}$ có nghĩa khi $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Tập xác định $D = (-\infty; 1)$

c. Biểu thức $\frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ có nghĩa khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

Tập xác định $D = [0; +\infty) \setminus \{1\}$

Bài 3: *Cho hàm số f(x)* = $\begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{nếu } x > 0 \\ \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1} & \text{nếu } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$

a. *Tìm tập xác định của hàm số f(x).*

b. *Tìm giá trị của hàm số tại x = 0, x = 2, x = –3, x = –1.*

Giải:

a. Tìm tập xác định

Trên $(0; +\infty)$ biểu thức $\frac{x}{x+1}$ luôn có nghĩa

Trên $[-1; 0]$ biểu thức $\frac{\sqrt[3]{x+1}}{x-1}$ luôn có nghĩa

Suy ra, biểu thức f(x) luôn có nghĩa trên $[-1; +\infty)$

Vậy tập xác định $D = [-1; +\infty)$.

b. Tính giá trị của hàm số

Ta có: $x = 2$ thuộc $(0; +\infty)$ nên $f(2) = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$x = 0$ và $x = -1$ thuộc $[-1; 0]$

nên $f(0) = \dfrac{\sqrt[3]{0+1}}{0-1} = 1$ và $f(-1) = \dfrac{\sqrt[3]{-1+1}}{-1-1} = 0$

$x = -3 \notin D$ nên không tồn tại giá trị của hàm số.

2. Xác định điểm $M(\alpha;\beta)$ thuộc (không thuộc) đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$

Phương pháp

– Tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$

– Kiểm tra $x = \alpha$ có thuộc D không

+ Nếu $x = \alpha \in D$ thì tính $f(\alpha)$ và so sánh với β

$f(\alpha) = \beta$ thì $M(\alpha;\beta) \in (C)$

$f(\alpha) \neq \beta$ thì $M(\alpha;\beta) \notin (C)$

+ Nếu $x = \alpha \notin D$ thì $M(\alpha;\beta) \notin (C)$

Bài 4: *Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$. Các điểm sau có thuộc đồ thị của hàm số không?*

a. $M_1(2;\dfrac{1}{3})$ b. $M_2(1;0)$ c. $M_3(0;-1)$

d. $M_4(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2})$ e. $M_5(3;-\dfrac{1}{5})$

Giải:

Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$ là $D = R \setminus \{1;\dfrac{1}{2}\}$, gọi (C) là đồ thị của $y = \dfrac{x-1}{2x^2-3x+1}$

a. $f(2) = \dfrac{1}{3} \Rightarrow M_1(2;\dfrac{1}{3}) \in (C)$.

b. Ta có: $1 \notin D \Rightarrow M_2 \notin (C)$.

c. $f(0) = -1 \Rightarrow M_3 \in (C)$.

d. Ta có: $\dfrac{1}{2} \notin D \Rightarrow M_4 \notin (C)$.

e. $f(3) = \dfrac{1}{5} \neq -\dfrac{1}{5} \Rightarrow M_5 \notin (C)$.

Nhận xét: *Chúng ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi để tính giá trị gần đúng của hàm số.*

Tính f(2), f(3) trên Casio FX–570 MS

$\boxed{(}\ \boxed{}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{A}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{)}\ \boxed{\div}\ \boxed{(}\ 2\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{A}$

$\boxed{\wedge}$ 2 $\boxed{-}$ 3 $\boxed{\text{ALPHA}}$ $\boxed{\text{A}}$ $\boxed{+}$ 1 $\boxed{)}$ $\boxed{\text{CALC}}$ A? $\boxed{2}$ = $(\frac{1}{3})$

Vậy $f(2) = \frac{1}{3}$

$\boxed{=}$ A ? $\boxed{3}$ = $(\frac{1}{5})$

Vậy $f(3) = \frac{1}{5}$

Trong trường hợp này máy cho giá trị đúng.

3. Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số trên (a;b)

Phương pháp

- $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ và $x_1 \neq x_2$
- Tính $f(x_1)$ theo x_1 và $f(x_2)$ theo x_2
- Lập tỉ số $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

+ Nếu $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên (a;b)

+ Nếu $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên (a;b)

Bài 5: *Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau trên khoảng đã chỉ ra*

a. $y = x^2 + 4x - 2$ *trên* $(-\infty; -2)$; $(-2; +\infty)$.

b. $y = -2x^2 + 4x + 1$ *trên* $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$.

c. $y = \frac{4}{x+1}$ *trên* $(-\infty; -1)$; $(-1; +\infty)$.

d. $y = \sqrt{2x - 7}$ *trên* $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$.

Giải

a. $\forall x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2^2 + 4x_2 - 2) - (x_1^2 + 4x_1 - 2)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 4)}{x_2 - x_1}$$

$$= x_2 + x_1 + 4$$

Trên $(-\infty; -2)$ ta có: $\begin{cases} x_1 < -2 \\ x_2 < -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < -4$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 4 < 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

Do đó, hàm số nghịch biến.

Trên $(-2; +\infty)$ ta có: $\begin{cases} x_1 > -2 \\ x_2 > -2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > -4$

$\Rightarrow \quad x_1 + x_2 + 4 > 0 \Rightarrow \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Do đó, hàm số đồng biến.

b. $\forall x_1, x_2 \in R$ và $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(-2x_2^2 + 4x_2 - 1) - (-2x_1^2 + 4x_1 - 1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-2(x_2^2 - x_1^2) + 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)[-2(x_2 + x_1) + 4]}{x_2 - x_1}$$

$$= -2(x_1 + x_2) + 4$$

Trên $(-\infty; 1)$ ta có: $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 < 2$

$\Rightarrow \quad -2(x_1 + x_2) > -4 \Rightarrow -2(x_1 + x_2) + 4 > 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Do đó, hàm số đồng biến.

Trên $(1; +\infty)$ ta có: $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 > 2$

$\Rightarrow \quad -2(x_1 + x_2) < -4 > 0 \Rightarrow -2(x_1 + x_2) + 4 < 0$

$\Rightarrow \quad \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$

Do đó, hàm số nghịch biến.

c. $\forall x_1, x_2 \in R \setminus \{-1\}$ và $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left(\frac{4}{x_2 + 1} - \frac{4}{x_1 + 1}\right)\frac{1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-4(x_2 - x_1)}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)(x_2 - x_1)} = \frac{-4}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} \qquad (1)$$

Trên $(-\infty; -1)$ ta có: $\begin{cases} x_1 < -1 \\ x_2 < -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 < 0 \\ x_2 + 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$

Từ (1), ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} < 0$

Do đó, hàm số nghịch biến.

Trên $(-1; +\infty)$ ta có: $\begin{cases} x_1 > -1 \\ x_2 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 1 > 0 \\ x_2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1)) > 0$

Từ (1), ta có: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{-4}{(x_2 + 1)(x_1 + 1)} < 0$

Do đó, hàm số nghịch biến.

d. $\forall x_1, x_2 \in \left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$ và $x_1 \neq x_2$:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\sqrt{2x_2 - 7} - \sqrt{2x_1 - 7}}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)\sqrt{2x_2 - 7} + \sqrt{2x_1 - 7}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2x_2 - 7} + \sqrt{2x_1 - 7}} > 0$$

Do đó, hàm số đồng biến.

4. Xác định tính chẵn, lẻ của hàm số y = f(x)

Phương pháp

- Tìm tập xác định D
- D phải thoả mãn điều kiện: $\forall x \in D$
  $\Rightarrow -x \in D$ (D là tập đối xứng qua O)
- Từ f(x) tìm f(−x)
- So sánh f(x) và f(−x)
  + Nếu $f(-x) = f(x)$ thì $y = f(x)$ là hàm số chẵn
  + Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì $y = f(x)$ là hàm số lẻ

Ghi nhớ: $(-x)^{2n} = x^{2n}$, $\forall n \in N^* = N \setminus \{0\}$

$(-x)^{2n+1} = -x^{2n+1}$

$|-x| = |x|$

Bài 6: *Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:*

a. $y = 3x^4 - 4x^2 + 3$ b. $y = x^2 - 2|x| + 1$

c. $y = 2x^3 - 5x$ d. $y = \sqrt{1+x}$

e. $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$

Giải

a. Tập xác định D = R

$\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

$f(-x) = 3(-x)^4 - 4(-x)^2 + 3 = 3x^4 - 4x^2 + 3$

$f(-x) = f(x)$

Suy ra: $y = 3x^4 - 4x^2 + 3$ là hàm số chẵn.

b. Tập xác định D = R

$\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

$f(-x) = (-x)^2 - 2|-x| + 1 = x^2 - 2|x| + 1 = f(x)$

Suy ra: $y = x^2 - 2|x| + 1$ là hàm số chẵn.

c. Tập xác định $D = R$

$\forall x \in R \Rightarrow -x \in R$

$f(-x) = 2(-x)^3 - 5(-x) = -2x^3 + 5x = -(2x^3 - 5x)$

$f(-x) = -f(x)$

Suy ra: $y = 2x^3 - 5x$ là hàm số lẻ.

d. Tập xác định $D = [-1; +\infty)$, tập này không đối xứng qua O.

Lấy $2 \in D$ nhưng $-2 \notin D$

Suy ra: $y = \sqrt{1+x}$ không là hàm chẵn cũng không là hàm lẻ.

e. Tập xác định $D = [-1; 1]$

$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$f(-x) = \sqrt{1+(-x)} + \sqrt{1-(-x)} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} = f(x)$

Suy ra: $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ là hàm số chẵn.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a. $y = \dfrac{2x+1}{x^2 - 2x + 5}$ b. $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-x}$

c. $y = \dfrac{2x-3}{-6x^2 + 19x - 15}$ d. $y = \sqrt{-(x-2)^2(x+1)^2(x+5)^2}$

e. $y = \dfrac{\sqrt{-2x^2 + 22x - 56}}{\sqrt{-x^2 + 13x - 40}}$ f. $y = \dfrac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$

Bài 2. Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1}{(2x-3)(x-5)} & x \in (-\infty; 0) \\ \sqrt{2x+5} & x \in [0; 9) \\ \sqrt{x^2 - 11x + 30} & x \in [10; 20] \end{cases}$

a. Tìm tập xác định của hàm số

b. Tính giá trị của hàm số tại các điểm $x = -2$; $x = 1$; $x = 5$; $x = 12$.

Bài 3. Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x-1}}$

a. Tìm tập xác định của hàm số

b. Dùng máy tính bỏ túi, tính giá trị gần đúng của $f(3)$, $f(\sqrt{3})$, $f(\pi)$, $f(1{,}2345)$ chính xác đến phần trăm.

Bài 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x+1}{3x^2 - 2x + m}$

a. Tìm m để hàm số có tập xác định là R.

b. Khi $m = -1$, các điểm sau có thuộc đồ thị hàm số không?

$M_1(3; \frac{1}{5})$; $M_2(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$; $M_3(2; \frac{1}{2})$; $M_4(\frac{1}{2}; \frac{-6}{5})$

Bài 5. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số trên khoảng đã chỉ ra.

a. $y = 2x^2 - 5x + 3$ trên $(-\infty; \frac{5}{4})$; $(\frac{5}{4}; +\infty)$

b. $y = -x^2 + 4x + 5$ trên $(-\infty; 2)$; $(2; +\infty)$

c. $y = \dfrac{-3x - 1}{x - 1}$ trên $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$

d. $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ trên $(-\infty; 1)$; $(1; +\infty)$

Bài 6. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a. $y = x^4 + 2x^2 - 1$ b. $y = x^5 - x^3$

c. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$ d. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$

e. $y = |x + 1| - |x - 1|$ f. $y = \sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}$

Bài 7. Cho u(x) là hàm số chẵn, v(x) là hàm số lẻ có cùng tập xác định D và hàm số f(x) = u(x) + v(x)

a. Biểu thị f(−x) theo u(x) và v(x)

b. Cho $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$. Tìm u(x) và v(x)

§2 HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Khảo sát hàm số bậc nhất y = ax + b với a ≠ 0

1. Tập xác định D = R

2. Chiều biến thiên:

Định lý: Nếu a > 0 thì hàm số y = ax + b đồng biến trên R

Nếu a < 0 thì hàm số y = ax + b nghịch biến trên IR

Bảng biến thiên:

a > 0

x	$-\infty$		$+\infty$
y			$+\infty$
	$-\infty$	↗	

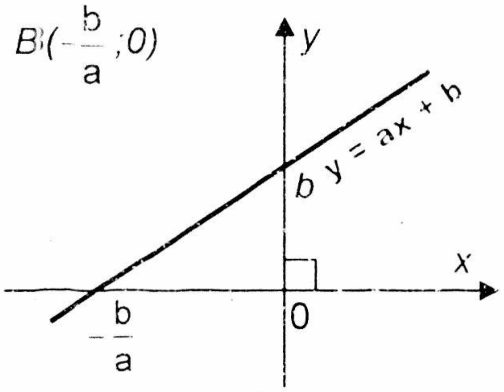
a < 0

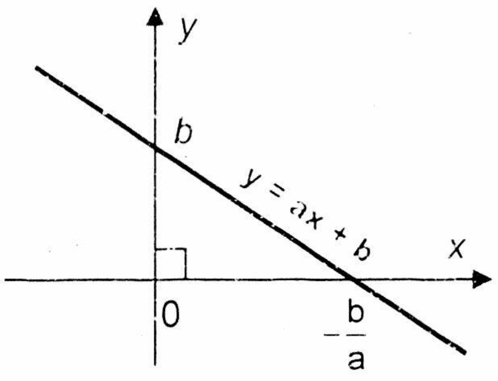
x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$		
		↘	$-\infty$

3. Đồ thị:

– Đồ thị của hàm số y = ax + b (a ≠ 0) là một đường thẳng không song song và cũng không trùng với các trục toạ độ.

– Đường thẳng $y = ax + b$ ($a \neq 0$) đi qua hai điểm $A(0;b)$ và $B(-\frac{b}{a};0)$





– Gọi đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là đường thẳng $y = ax + b$, a là hệ số góc của nó.

II. Hàm số hằng y = b

– Đồ thị của hàm số $y = b$ là đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm $(0;b)$.

– Đồ thị của hàm số $y = b$ gọi là đường thẳng $y = b$.

– Khi $b = 0$, đường thẳng này trùng với trục hoành.

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Vẽ đồ thị hàm số y = ax + b (a ≠ 0)

Phương pháp

– Xác định hai điểm của đường thẳng bằng cách cho x hai giá trị x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$) rồi tính y_1, y_2.

– Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$.

Bài 1: *Vẽ đồ thị của các hàm số sau:*

a. $y = 2x - 3$ b. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

b. $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ d. $y = -2x$

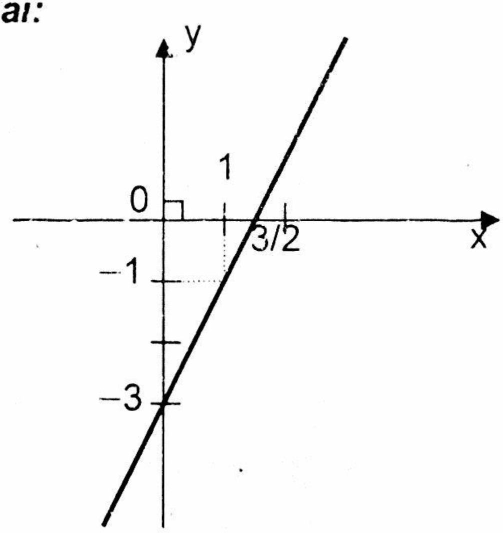
Giải:

a. $y = 2x - 3$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = -3$

$x = 1 \Rightarrow y = -1$

Đồ thị của hàm số $y = 2x - 3$ là một đường thẳng đi qua hai điểm $(0; -3)$ và $(1; -1)$

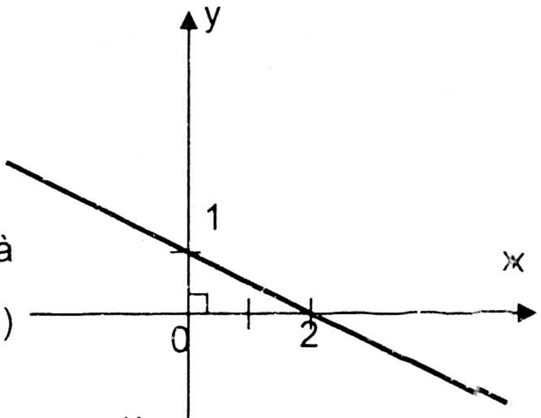


b. $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 2 \Rightarrow y = 0$

Đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 1$ là một đường thẳng đi qua hai điểm (0; 1) và (2; 0)

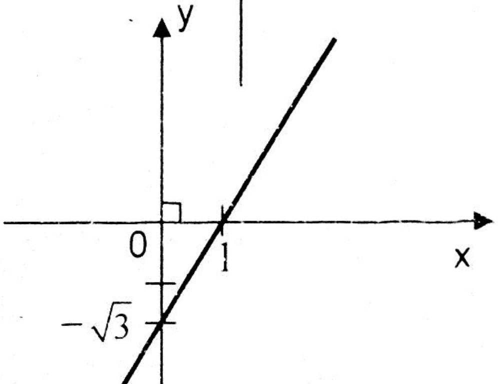


c. $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$

Đồ thị của hàm số $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ là một đường thẳng đi qua hai điểm (1; 0) và $(0; -\sqrt{3}) \approx (0; -1,7)$

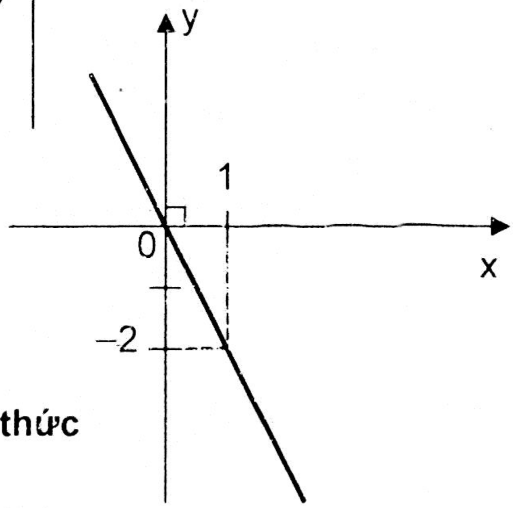


d. $y = -2x$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = -2$

Đồ thị hàm số $y = -2x$ là một đường thẳng đi qua hai điểm (0; 0) và (1; −2)



2. Vẽ đồ thị hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp

- Xác định công thức với tập xác định đã cho
- Vẽ đồ thị xác định bởi công thức đó trên tập xác định đã cho
- Đồ thị cần vẽ là hợp các đồ thị thành phần trên cùng một hệ toạ độ

Bài 2: *Vẽ đồ thị của các hàm số sau:*

a. $y = \begin{cases} x+1 & \text{với} \quad x \geq 1 \\ -2x+4 & \text{với} \quad x < 1 \end{cases}$

b. $y = \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & \text{với} \quad x \leq 3 \\ -1 & \text{với} \quad 3 < x < 5 \\ -x-\frac{1}{2} & \text{với} \quad x \geq 5 \end{cases}$

Giải:

a. $y = \begin{cases} x+1 & \text{với } x \geq 1 \\ -2x+4 & \text{với } x < 1 \end{cases}$

– Với $x \geq 1$ ta có $y = x + 1$

Cho $x = 1 \Rightarrow y = 2$

$x = 2 \Rightarrow y = 3$

Đồ thị $y = x + 1$ với $x \ge 1$ là một tia đi qua hai điểm (1; 2) và (2; 3))

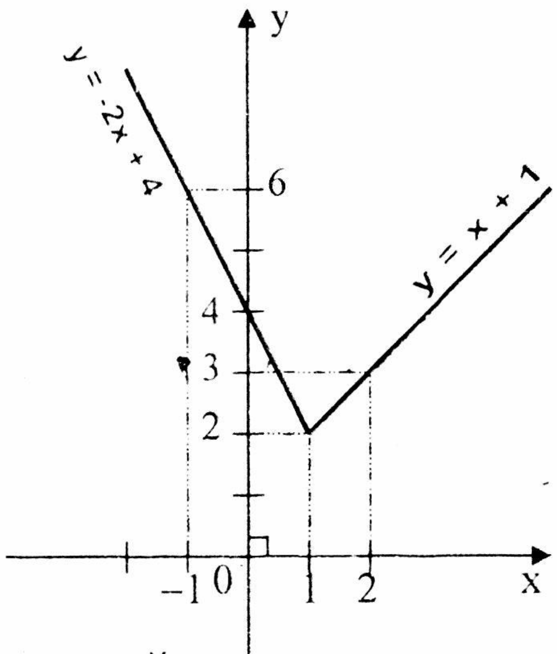
– Với $x < 1$ ta có $y = -2x + 4$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 4$

$x = -1 \Rightarrow y = 6$

Đồ thị $y = -2x + 4$ là một tia đi qua hai điểm (0; 4) và (–1; 6)

– Đồ thị của hàm số là hợp của hai đồ thị trên



b. $$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 1 & \text{với } x \le 3 \\ -1 & \text{với } 3 < x < 5 \\ -x - \frac{1}{2} & \text{với } x \ge 5 \end{cases}$$

– Với $x \le 3$ ta có

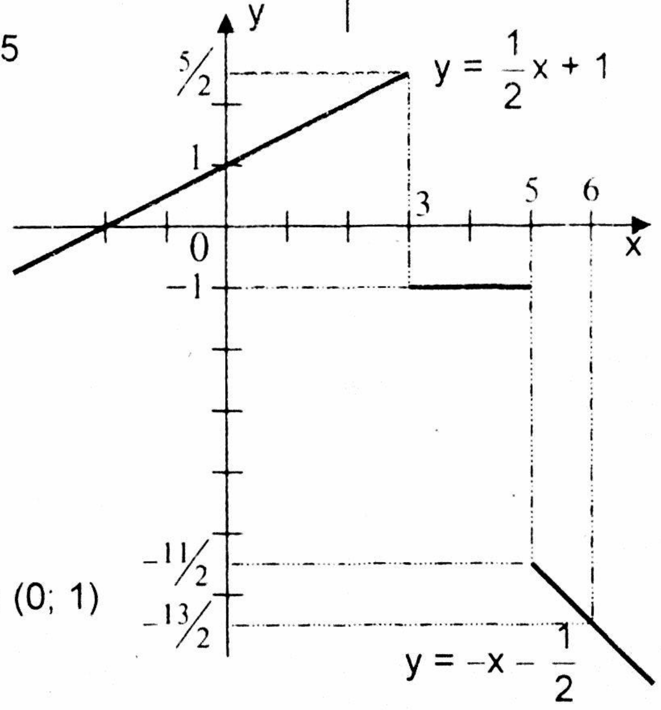
$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

Cho $x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 3 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

Đồ thị $y = \frac{1}{2}x + 1$

là một tia đi qua hai điểm (0; 1) và $(3; \frac{5}{2})$



– Với $3 < x < 5$ ta có $y = -1$

Đồ thị là đoạn thẳng nằm trên đường thẳng $y = -1$

– Với $x \ge 5$ ta có $y = -x - \frac{1}{2}$

Cho $x = 5 \Rightarrow y = -\frac{11}{2}$

$x = 6 \Rightarrow y = -\frac{13}{2}$

Đồ thị $y = -x - \frac{1}{2}$ là một tia đi qua hai điểm $(5; -\frac{11}{2})$ và $(6; -\frac{13}{2})$

– Đồ thị của hàm số là hợp của ba đồ thị trên, ở đây điểm $(3; \frac{5}{2})$ và $(5; -\frac{11}{2})$ thuộc đồ thị còn $(3; -1)$ và $(5; -1)$ không thuộc đồ thị

3. Viết phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm $A(x_1,y_1)$ và $B(x_2,y_2)$

Phương pháp

– Đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$

– $A \in (d)$ và $B \in (d)$

– Giải hệ $\begin{cases} ax_1 + b = y_1 \\ ax_2 + b = y_2 \end{cases}$ tìm a và b

Bài 3: *Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm*

a. A(4; 3) và B(2; –1)

b. M(0; 2) và N($-\sqrt{3}$; –1)

c. P(1; 3) và Q($-\sqrt{5}$; 3)

Giải:

a. Gọi đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$, (d) đi qua hai điểm A và B nên ta có $A \in (d)$ và $B \in (d)$

Suy ra: $\begin{cases} 4a + b = 3 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -5 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng (d): $y = 2x - 5$.

b. Gọi đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$, (d) đi qua hai điểm M và N nên ta có $M \in (d)$ và $N \in (d)$

Suy ra: $\begin{cases} a.0 + b = 2 \\ -a\sqrt{3} + b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = \sqrt{4} \end{cases}$

Phương trình đường thẳng (d): $y = \sqrt{3}x + 2$

c. Gọi đường thẳng (d) có phương trình $y = ax + b$, (d) đi qua hai điểm P và Q nên ta có $P \in (d)$ và $Q \in (d)$

Suy ra: $\begin{cases} a + b = 3 \\ -\sqrt{5}a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 3 \end{cases}$

Phương trình đường thẳng (d): $y = 3$.

Nhận xét :

Khi $A(x_1,y_1)$ và $B(x_2,y_2)$ với $y_1 \neq y_2$, đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm A, B. Suy ra:

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y_1 = ax_1 + b \\ y_2 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - y_1 = a(x - x_1) \\ y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Suy ra: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Phương trình đường thẳng (d) đi qua hai điểm A(4; 3) và B(2; −1) là:

$$\frac{x - 4}{2 - 4} = \frac{y - 3}{-1 - 3} \Leftrightarrow y = 2x - 5$$

4. Viết phương trình đường thẳng đi qua A(α; β) và song song với đường thẳng cho trước (d): y = ax + m

Phương pháp

- Hai đường thẳng song song thì có hệ số góc bằng nhau
- Đường thẳng (d_1) song song với (d), phương trình có dạng y = ax + b
- $A \in (d_1) \Rightarrow b = \beta - a\alpha$

Bài 4: *Viết phương trình của đường thẳng*

a. *Đi qua điểm A(1; 2) và song song với đường thẳng y = −2x + 1*

b. *Đi qua điểm M(1; −1) và song song với Ox*

Giải:

a. Đường thẳng y = −2x + 1 có hệ số góc a = −2, đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng y = −2x + 1 nên phương trình có dạng y = −2x + b

Đường thẳng đi qua điểm A(1; 2) nên: $2 = -2.1 + b \Rightarrow b = 4$

Phương trình đường thẳng y = −2x + 4

b. Phương trình của đường thẳng Ox là y = 0 có hệ số góc a = 0, đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng Ox nên phương trình có dạng y = b

Đường thẳng đi qua điểm M(1; −1) nên: −1 = b

Phương trình đường thẳng y = −1

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Phương pháp

(d_1): $y = a_1x + b_1$

(d_2): $y = a_2x + b_2$

- $(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow a_1 = a_2$ và $b_1 \neq b_2$
- (d_1) cắt (d_2) $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2$, toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ y = a_2x + b_2 \end{cases}$

Bài 5: *Cho ba đường thẳng* (d_1): $y = \frac{m}{2}x + \frac{1}{2}$

(d_2): $y = -x + 2$ (d_3): $y = 2x + 1$

Tìm các giá trị của m để:

a. (d_1) *song song với* (d_2)

b. (d_1) *cắt* (d_2)

c. (d_1), (d_2), (d_3) *đồng quy*

Giải:

a. Hệ số góc của đường thẳng (d_1) là $a_1 = \frac{m}{2}$

Hệ số góc của đường thẳng (d_2) là $a_2 = -1$

$(d_1) // (d_2) \Leftrightarrow \frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = -2$

b. (d_1) cắt $(d_2) \Leftrightarrow \frac{m}{2} \neq -1 \Leftrightarrow m \neq -2$

c. Gọi A là giao điểm của (d_2) và (d_3).

Toạ độ của A là nghiệm $\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

Để (d_1), (d_2), (d_3) đồng quy thì $A \in (d_1)$

Suy ra: $\frac{5}{3} = \frac{m}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \Rightarrow m = 7.$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Viết đường thẳng đi qua gai điểm A(1; 2) và B(2; 1). Vẽ đường thẳng đó

Bài 2. Xác định a và b để đồ thị của hàm số y = ax + b đi qua các điểm:

a. A(1; 4), B(2; 1) b. B(2; 1), C(6; 2) c. A(1; 4), C(6; 2)

d. Vẽ đồ thị các hàm số đó lên một hệ toạ độ

Bài 3. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số y = –2x + m(x + 1)

a. Đi qua M(–2; 3).

b. Song song với đường thẳng y = 2x + 2006.

c. Song song với trục hoành.

Bài 4. Cho hai đường thẳng y = 2x + 5 và y = mx – 3

a. Xác định m để hai đường thẳng đó song song

b. Xác định m để hai đường thẳng đó cắt nhau tại một điểm trên trục hoành

Bài 5. Viết phương trình của đường thẳng

a. Đi qua điểm A(4; 3), song song với đường thẳng 2x – 3y + 5 = 0.

b. Đi qua điểm B(2; –5) và song song với trục hoành.

Bài 6. Xác định k để các đường thẳng sau đồng quy

a. x – 2y + 1 = 0; y = –2x + 5; kx + 4y = 7

b. 3y = 4x + k; y = x + 4; 5x – y – 8 = 0

Bài 7.

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{với} \quad x \le 1 \\ -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{13}{2} & \text{với} \quad 1 < x < 3 \\ x - 1 & \text{với} \quad x \ge 3 \end{cases}$

b. Tìm m để phương trình f(x) = m có ba nghiệm phân biệt (m là tham số)

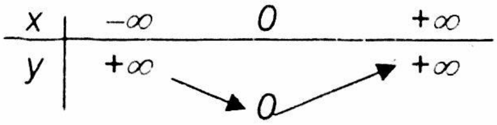
§3. HÀM SỐ $y = |x|$, $y = |ax + b|$, $y = [x]$

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

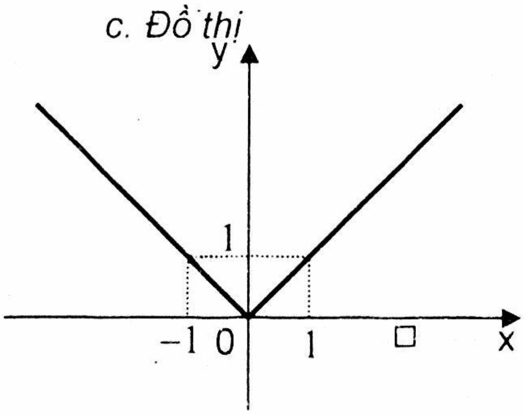
1. Hàm số $y = |x|$

a. Tập xác định D = R

b. Chiều biến thiên



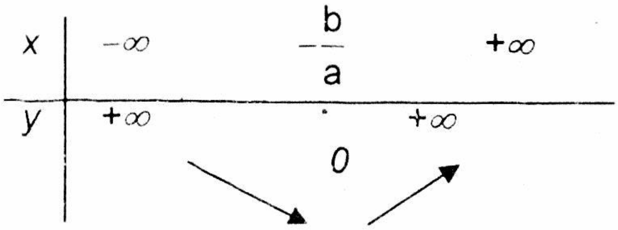
c. Đồ thị



2. Hàm số $y = |ax + b|$

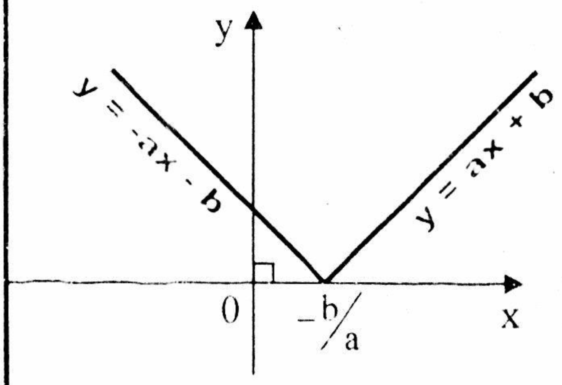
a. Tập xác định D = R

b. Chiều biến thiên

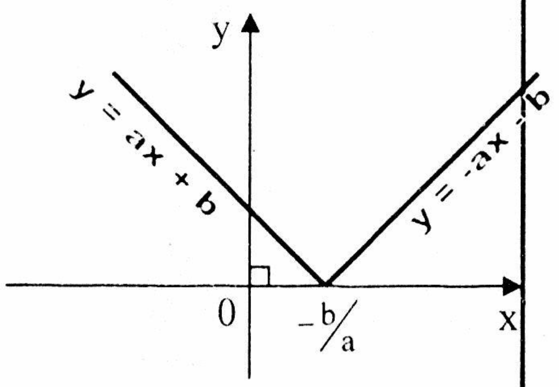


c. Đồ thị

a > 0



a < 0



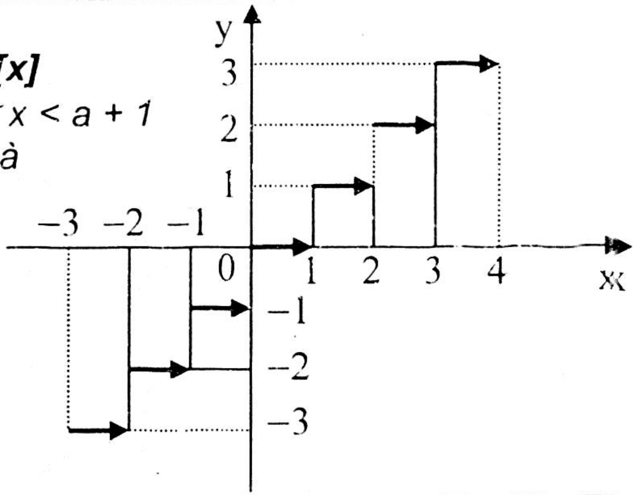
3. Hàm phần nguyên y = [x]

– Số nguyên a sao cho a ≤ x < a + 1 gọi là phần nguyên của x và kí hiệu [x]

– Hàm số y = [x]

Tập xác định D = R

Đồ thị:



B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm y = |ax + b|

Phương pháp

– Khử dấu trị tuyệt đối, đưa hàm đã cho về hàm số cho bởi nhiều công thức

– Lập bảng biến thiên cho hàm đó

– Vẽ đồ thị hàm số cho bởi nhiều công thức

Bài 1: *Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số sau:*

a. $y = |\frac{2}{3}x - 5|$ *b.* $y = |2x - 1| - |-3x + 2|$

Giải:

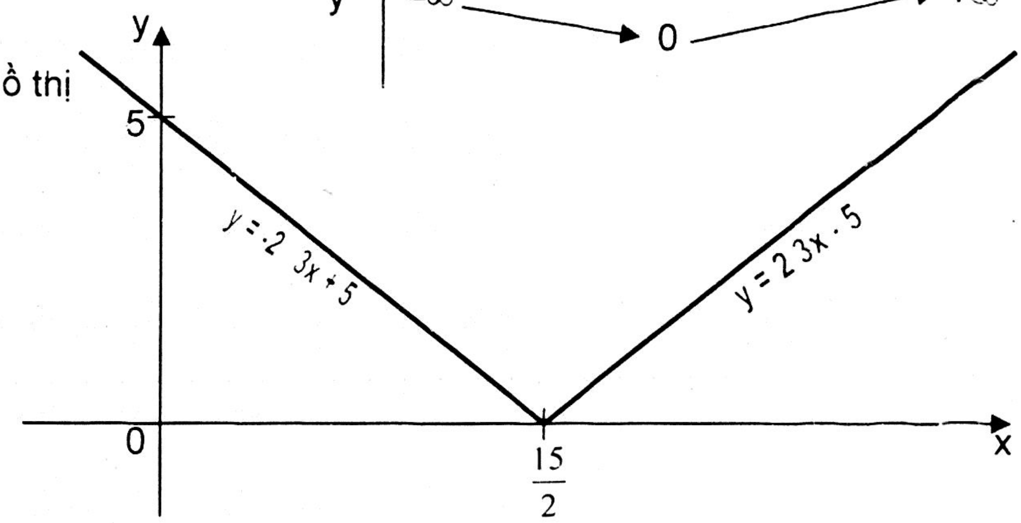
a. $$y = |\frac{2}{3}x - 5| = \begin{cases} \frac{2}{3}x - 5 & \text{khi } x \geq \frac{15}{2} \\ -\frac{2}{3}x + 5 & \text{khi } x < \frac{15}{2} \end{cases}$$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

x	$-\infty$	$\frac{15}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

– Đồ thị



b. $y = |2x - 1| - |-3x + 2|$

Ta có: $|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & \text{khi } x \geq \frac{1}{2} \\ -2x + 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \end{cases}$ và $|-3x + 2| = \begin{cases} -3x + 2 & \text{khi } x \leq \frac{2}{3} \\ 3x - 2 & \text{khi } x > \frac{2}{3} \end{cases}$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$\lvert 2x - 1\rvert$	$-2x + 1$	0	$2x - 1$	|	$2x - 1$
$\lvert -3x + 2\rvert$	$-3x + 2$	|	$-3x + 2$	0	$3x - 2$

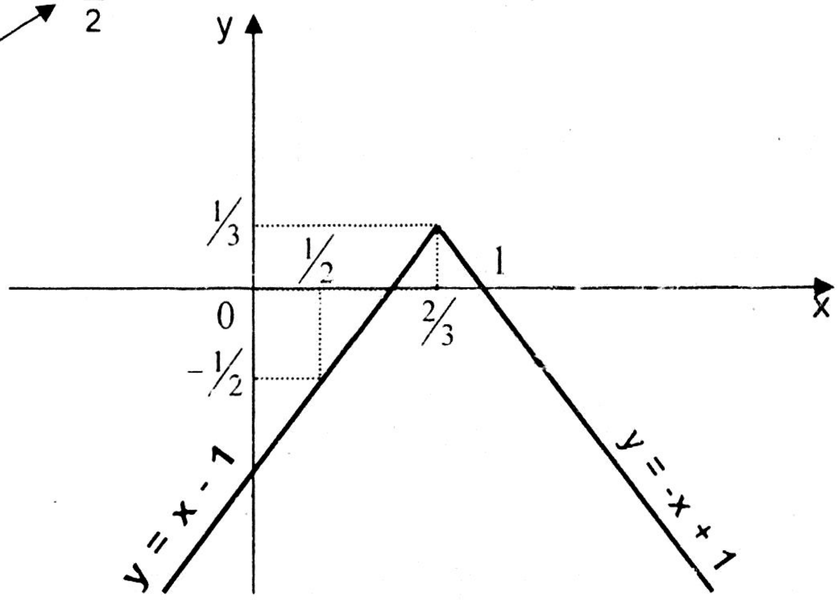
$$y = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x < \frac{1}{2} \\ 5x - 3 & \text{khi } \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ -x + 1 & \text{khi } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\frac{1}{2}$	↗	0	↗	$\frac{1}{3}$	↘	0	↘	$-\infty$

– Đồ thị



Bài 2:

a. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị y = |x| + |x – 1| + |x – 2|

b. Tìm m để phương trình $|x| + |x - 1| + |x - 2| = m$ có hai nghiệm phân biệt

Giải:

a. Ta có: $|x| = \begin{cases} x & \text{khi } x \geq 0 \\ -x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

x	−∞	0		1		2	+∞
|x|	−x	0	x	|	x	|	x
|x − 1|	−x + 1	|	−x + 1	0	x − 1	|	x − 1
|x − 2|	−x + 2	|	−x + 2	|	−x + 2	0	x − 2

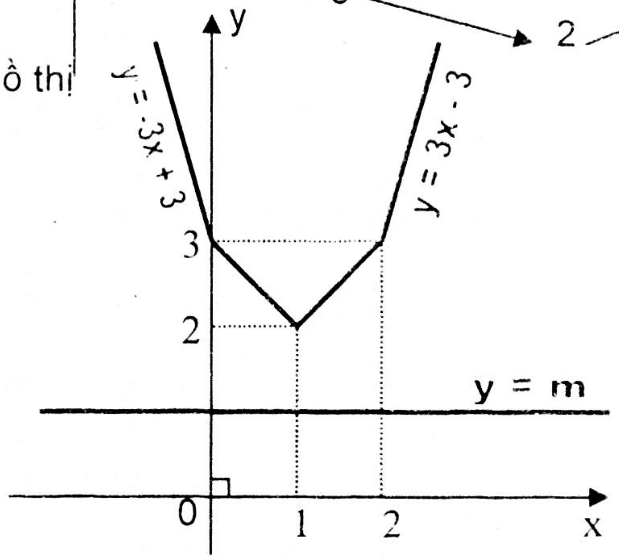
$$y = \begin{cases} -3x + 3 & \text{khi } x < 0 \\ -x + 3 & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{khi } 1 \leq x < 2 \\ 3x - 3 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

x	−∞		0		1		2		+∞
y	+∞	↘	3	↘	2	↗	3	↗	+∞

– Đồ thị



b. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$

(d) là đồ thị y = m (hàm hằng)

Để phương trình $|x| + |x - 1| + |x - 2| = m$ có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng (d) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt

Suy ra: m > 2

2. Vẽ đồ thị hàm số chứa phần nguyên

Phương pháp

- Xác định phần nguyên của hàm số
- Xác định khoảng chứa x
- Vẽ đồ thị hàm số

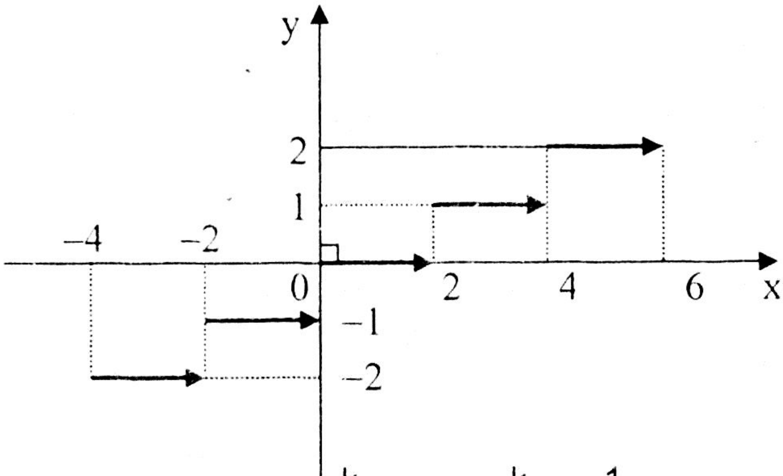
Bài 3: *Vẽ đồ thị hàm số*

a. $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ b. $y = \left[\sqrt{2}x\right]$

Giải:

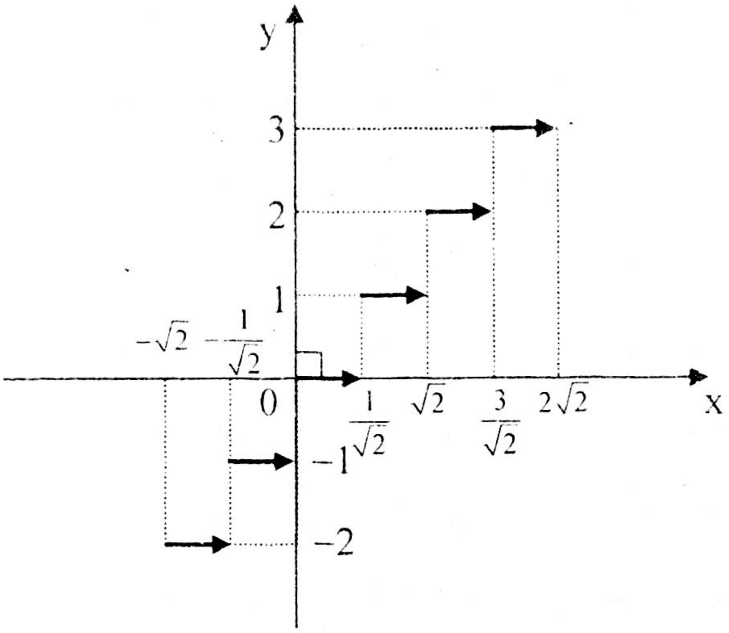
a. $\forall k \in Z$ ta có $k \le \frac{x}{2} < k + 1 \Leftrightarrow 2k \le x < 2(k + 1)$

Suy ra: $\left[\frac{x}{2}\right] = k$ khi $x \in [2k; 2k + 2)$



b. $\forall k \in Z$ ta có $k \le \sqrt{2}x < k + 1 \Leftrightarrow \frac{k}{\sqrt{2}} \le x < \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$

Suy ra: $\left[\sqrt{2}x\right] = k$ với $x \in \left[\frac{k}{\sqrt{2}}; \frac{k}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



C. BÀI TẬP

Bài 1. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số sau:

a. $y = -2|2x - 1|$ b. $y = |3x| - 3x$

c. $y = |2x - 4| + |x + 3| - |x - 1|$ d. $y = |1 - |x|| - |x| + 1$

Bài 2. Cho hàm số $y = ||x| - 1|$:

a. Vẽ đồ thị hàm số $y = ||x| - 1|$

b. Tuỳ theo m, hãy tìm số nghiệm của phương trình: $||x| - 1| - 2m = 0$

Bài 3. Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a. $y = x + [x]$ b. $y = [2x - 1]$ c. $y = \left[\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right] + 1$

§4. HÀM SỐ BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Khảo sát hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

a. Tập xác định D = R

b. Chiều biến thiên

<table>
<tr><th><i>a > 0</i></th><th><i>a < 0</i></th></tr>
<tr><td><i>– Hàm số nghịch biến trên khoảng</i> $(-\infty; -\frac{b}{2a})$
<i>– Hàm số đồng biến trên khoảng</i> $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$
<i>Bảng biến thiên:</i>
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & +\infty & & & & +\infty \\ & & \searrow & & \nearrow & \\ & & & -\frac{\Delta}{4a} & & \end{array}$$</td><td><i>– Hàm số đồng biến trên khoảng</i> $(-\infty; -\frac{b}{2a})$
<i>– Hàm số nghịch biến trên khoảng</i> $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$
<i>Bảng biến thiên:</i>
$$\begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & & -\frac{b}{2a} & & +\infty \\ \hline y & & & -\frac{\Delta}{4a} & & \\ & & \nearrow & & \searrow & \\ & -\infty & & & & -\infty \end{array}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2"><i>Ở đây</i> $\Delta = b^2 - 4ac$</td></tr>
</table>

– Khi $\Delta > 0$ Parabol (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Khi $\Delta = 0$ Parabol (P) tiếp xúc với trục hoành

Khi $\Delta < 0$ Parabol (P) không cắt trục hoành

– Parabol (P) luôn cắt trục tung tại điểm (0;c)

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm bậc hai

Phương pháp

– Tập xác định D = R

– Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

– Lập bảng biến thiên

– Xác định giao điểm với trục Oy: C(0,c)

– Xác định giao điểm với trục Ox (nếu có). Khi $\Delta > 0$, các giao điểm là

$A\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$; $B\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};0\right)$

– Vẽ Parabol (P) đi qua I, C và A, B (nếu có) và (P) luôn nhận đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$ làm trục đối xứng

Bài 1: *Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:*

a. $y = 3x^2 - 4x + 1$ *b.* $y = -3x^2 + 2x + 1$

c. $y = 4x^2 - 4x + 1$ *d.* $y = -x^2 + x - 1$

Giải:

a. $y = 3x^2 - 4x + 1$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh $I\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{3}$	↗	$+\infty$

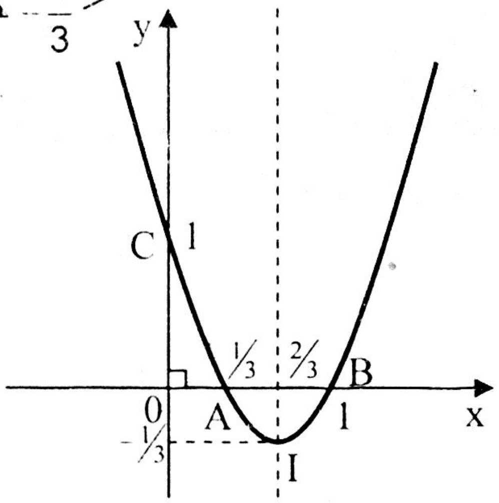
– Đồ thị:

Giao điểm với trục Oy: C(0; 1)

Giao điểm với trục Ox:

$A(\frac{1}{3}; 0)$; B(1; 0)

Trục đối xứng $x = \frac{2}{3}$



b. $y = -3x^2 + 2x + 1$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh $I\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	$-\infty$

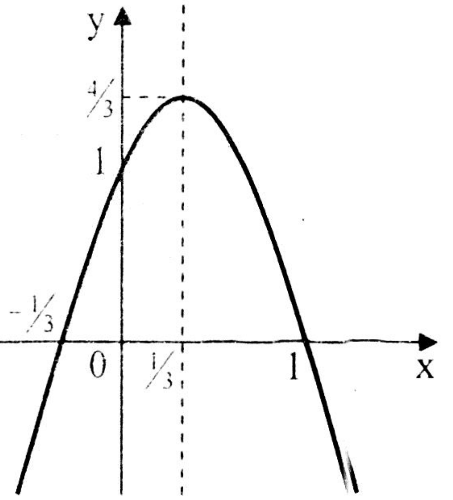
– Đồ thị:

Giao điểm với trục Oy: (0; 1)

Giao điểm với trục Ox:

$(-\frac{1}{3}; 0)$; (1; 0)

Trục đối xứng $x = \frac{1}{3}$



c. $y = 4x^2 - 4x + 1$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh $I(\frac{1}{2}; 0)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

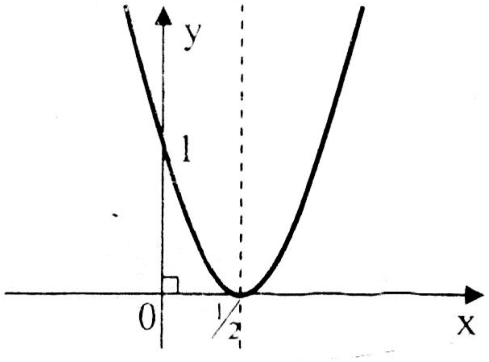
– Đồ thị

Giao điểm với trục Oy: (0; 1)

Giao điểm với trục hoành:

$(\frac{1}{2}; 0)$

Trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$



d. $y = -x^2 + x - 1$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh $I\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}\right)$

Bảng biến thiên

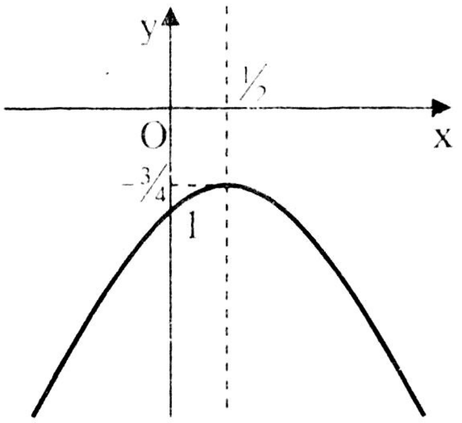
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
		↗		↘	

y		$-\frac{3}{4}$	
	$-\infty$		$-\infty$

– Đồ thị

Giao điểm với trục Oy: (0; –1)

Trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$



Nhận xét:

Giá trị $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ *nên chúng ta dùng máy tính bỏ túi để tính giá trị của hàm số; Dùng máy tính Casio FX–500 MS hoặc FX–570 MS để giải phương trình bậc hai tìm hoành độ giao điểm (nếu có)*

2. Xác định Parabol (P) khi biết đủ các thành phần để xác định Parabol đó

Phương pháp

– *Parabol (P):* $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$

– *Từ các thành phần đã biết để xác định a, b, c*

Bài 2: *Xác định Parabol (P):* $y = ax^2 + bx + 2$. *Biết rằng Parabol đó:*

a. *Đi qua hai điểm M(1; 5) và N(–2; 8).*

b. *Đi qua điểm A(3; –4) và có trục đối xứng* $x = -\frac{3}{2}$.

c. *Có đỉnh I(2; –2).*

Giải:

a. (P) đi qua M(1; 5) và N(–2; 8) nên toạ độ của M và N nghiệm đúng phương trình $ax^2 + bx + 2 = 0$

Suy ra: $\begin{cases} 5 = a + b + 2 \\ 8 = 4a - 2b + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Vậy (P): $y = 2x^2 + x + 2$.

b. (P) đi qua A(3; –4) nên: $-4 = 9a + 3b + 2 \Leftrightarrow 3a + b = -2$

Trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3a$

Ta có hệ: $\begin{cases} 3a + b = -2 \\ b = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -1 \end{cases}$

Vậy (P): $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2$.

c. Đỉnh của (P) có toạ độ

$$\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ y = 4a + 2b + 2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy (P): $y = x^2 - 4x + 2$.

3. Biện luận số nghiệm phương trình bằng đồ thị

Giả sử (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy dùng đồ thị (C) biện luận số nghiệm của phương trình $f(x) = M$ ($M = \varphi(m)$) với m là tham số

Phương pháp

– Vẽ đồ thị (C) và đường thẳng (d): $y = M$ song song với Ox và cắt Oy tại điểm (0; M)

– Số nghiệm của phương trình $f(x) = M$ bằng số giao điểm của (C) và (d)

Bài 3: *Cho hàm số $y = 2x^2 - 2x$*

a. *Khảo sát và vẽ đồ thị (P)*

b. *Dựa vào đồ thị (P), biện luận theo m số nghiệm của phương trình*

$$2x^2 - 2x + 1 - m = 0$$

Giải:

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (P)

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$

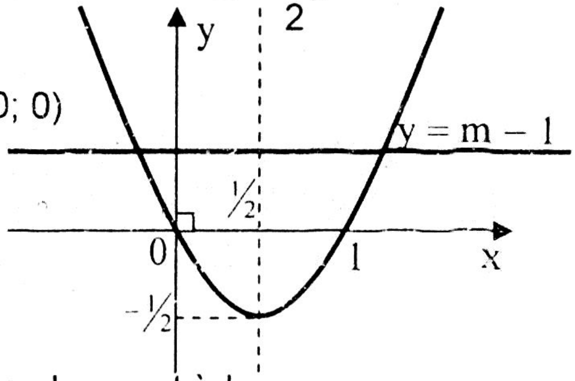
– Đồ thị

Giao điểm với trục Oy: O(0; 0)

Giao điểm với trục Ox

O(0; 0) và (1; 0)

Trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$



b. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình

$$2x^2 - 2x + 1 - m = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x = m - 1$$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của (P) và đường thẳng (d) $y = m - 1$

– Khi $m - 1 > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$ phương trình có hai nghiệm phân biệt.

– Khi $m - 1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ phương trình có một nghiệm $x = \frac{1}{2}$.

– Khi $m - 1 < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$ phương trình vô nghiệm.

Bài 4: *Cho hàm số* $y = |x^2 - 3x + 2|$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số

b. Dựa vào đồ thị (C), hãy xác định các giá trị m để phương trình $|x^2 - 3x + 2| - m = 0$ *có bốn nghiệm phân biệt*

Giải:

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

$$y = |x^2 - 3x + 2| = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{khi} \quad x^2 - 3x + 2 \ge 0 \\ -(x^2 - 3x + 2) & \text{khi} \quad x^2 - 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{khi} \quad x \le 1 \\ -x^2 + 3x - 2 & \text{khi} \quad 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \text{hoặc} \qquad x \ge 2$$

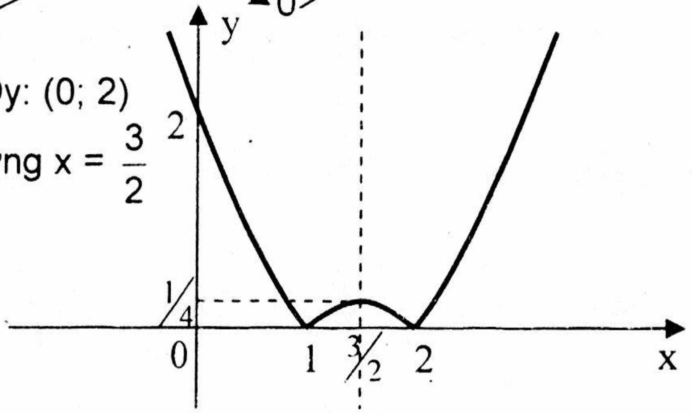
– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
f(x)	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

– Đồ thị: Giao điểm với trục Oy: (0; 2)

Trục đối xứng $x = \frac{3}{2}$



b. Xác định m:

Từ phương trình $|x^2 - 3x + 2| - m = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 3x + 2| = m$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng (d) y = m cắt đồ thị (C) tại 4 điểm phân biệt.

Suy ra: $0 < m < \frac{1}{4}$

Nhận xét:

Biết đồ thị (C) của hàm số y = f(x), suy ra đồ thi (C') của hàm số y = |f(x)|

Ta có $|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi} \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi} \quad f(x) < 0 \end{cases}$

– Vẽ đồ thị (C) của hàm số y = f(x)

– Giữ nguyên đồ thị (C) nằm từ trục Ox trở lên gọi là (C_o)

– Lấy đối xứng phần (C) nằm dưới Ox qua Ox gọi là (C'_o)

– Đồ thị $(C') = (C_o) \cup (C'_o)$

Bài 5: *Cho hai hàm số* $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$ (P_1) *và* $y = -x^2 + 2x + 3$ (P_2)

a. *Khảo sát và vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ toạ độ*

b. *Tìm m để đường thẳng y = m cắt hai đồ thị* (P_1), (P_2)

c. *Từ đồ thị* (P_1)*, hãy vẽ đồ thị (P):* $y = \frac{1}{2}x^2 - 4|x| + 3$

Giải

a. Khảo sát và vẽ đồ thị

$y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh I(4; –5)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		4		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	–5	↗	$+\infty$

$y = -x^2 + 2x + 3$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

Toạ độ đỉnh I'(1; 4)

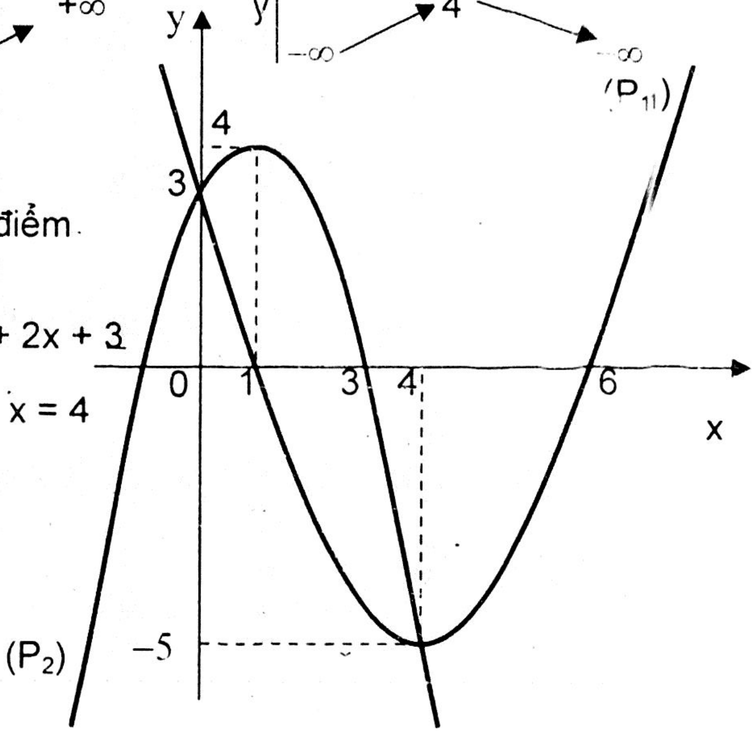
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	4	↘	$-\infty$

– Đồ thị: Hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2):

$$\frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 2x + 3$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 4$$

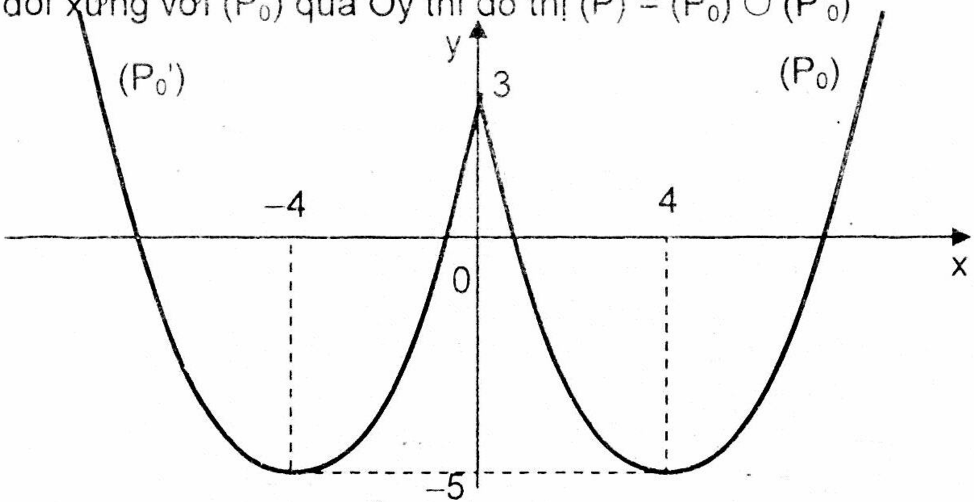


b. Để đường thẳng y = m cắt hai đồ thị (P_1) và (P_2) thì $-5 \leq m \leq 4$

c. $y = \frac{1}{2}x^2 - 4|x| + 3$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua Oy.

Ta có: $y = \frac{1}{2}x^2 - 4|x| + 3 = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 4x + 3 & \text{khi} \quad x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x^2 + 4x + 3 & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$

Khi $x \geq 0$ thì $|x| = x$ nên đồ thị (P) trùng với phần đồ thị (P_1) gọi là (P_0)
Lấy (P'_0) đối xứng với (P_0) qua Oy thì đồ thị $(P) = (P_0) \cup (P'_0)$



Nhận xét

Biết đồ thị (C): y = f(x), suy ra đồ thị (C'): y = f(|x|)

- Ta có y = f(|x|) là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua Oy
- Vẽ đồ thị (C) của hàm số y = f(x)
- Giữ nguyên phần đồ thị (C): y = f(x) với $x \geq 0$ gọi là (C_o)
- Vẽ (C'_o) đối xứng với (C_o) qua Oy
- Đồ thị $(C') = (C_o) \cup (C'_o)$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (P)

b. Dựa vào đồ thị (P), biện luận theo m số nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 4x + 4 + 2m = 0$$

Bài 2. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ (P) và $y = -x + 1$ (d)

a. Khảo sát và vẽ hai đồ thị hàm số (P) và (d) trên cùng một hệ toạ độ

b. Tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d).

c. Xác định các giá trị m để đường thẳng y = m cắt hai đồ thị trên

Bài 3. Xác định Parabol (P) $y = ax^2 + bx + c$ biết rằng Parabol đó

a. Đi qua ba điểm A(0; –1); B(1; –1); C(–1; 1)

b. Đi qua điểm D(3; 0) và có đỉnh I(1; 4)

Bài 4. Cho hàm số $y = -x^2 + 2|x| + 3$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C)

b. Dựa vào đồ thị (C), xác định các giá trị m để phương trình $x^2 - 2|x| + m =$ (có 4 nghiệm phân biệt

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. CÂU HỎI

1. Phát biểu quy ước về tập xác định của một hàm cho bởi công thức. Hai hàm số $y = \dfrac{x+1}{(x+1)(x^2+2)}$ và $y = \dfrac{1}{x^2+2}$ có gì khác nhau?
2. Thế nào là hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng (a; b)?
3. Thế nào là hàm số chẵn? Thế nào là hàm số lẻ? Tìm một ví dụ về hàm số chẵn, hàm số lẻ; hàm số không chẵn cũng không là hàm lẻ? Có hàm số nào vừa là hàm chẵn, vừa là hàm lẻ không?
4. Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = ax +$ b trong các trường hợp $a > 0$; $a < 0$
5. Hãy cho biết khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = |ax + b|$, $a \neq 0$
6. Nêu định nghĩa của [x]. Với các giá trị nào của x thì $[x] = x$?
7. Chỉ ra khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của hàm số $y = ax^2 + bx +$ c trong các trường hợp $a > 0$; $a < 0$
8. Xác định toạ độ của đỉnh, phương trình của trục đối xứng của Parabol $y = ax^2 + bx + c$.
9. Tìm điều kiện để Parabol $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt, tại một điểm. Xác định toạ độ của giao điểm trong các trường hợp đó.

   Khi nào thì Parabol $y = ax^2 + bx + c$ cắt trục tung? Xác định toạ độ giao điểm của Parabol với trục tung.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Tìm tập xác định của hàm số

a. $y = \sqrt{3x-1} + \dfrac{1}{\sqrt{4-3x}}$

b. $y = \sqrt{2-x} + \sqrt{7+x}$

c. $y = x + \sqrt{4-x^2}$

d. $y = 2\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} - \sqrt{x+1}$

Bài 2:

a. Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x+1}{x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m}$ có tập xác định là R.

b. Biện luận theo m tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x^2 - 2x + m}$

c. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{x - m + 1} - \dfrac{x}{\sqrt{2m + 1 - x}}$ xác định trên [2; 3]

Bài 3: Cho y = f(x), y = g(x) là hai hàm số đồng biến trên khoảng (a; b). Có thể kết luận gì về chiều biến thiên của các hàm số sau trên khoảng (a; b)?

a. y = f(x) + g(x) b. y = f(x) – g(x)

Xét câu hỏi trên với giả thiết y = f(x) và y = g(x) là hai hàm nghịch biến trên (a; b).

Bài 4: Cho biết y = f(x), y = g(x) là hai hàm số chẵn trên cùng một tập xác định D. Xác định tính chẵn, lẻ của các hàm số

a. y = f(x) + g(x) b. y = f(x) – g(x) c. y = f(x).g(x)

Giải bài toán trên với giả thiết y = f(x) và y = g(x) là hai hàm số lẻ trên cùng một tập xác định D.

Bài 5: Cho ba đường thẳng (d_m): y = (m – 2)x + 2m + 3
(d_1) : y = –2x + 1
(d_2) : y = 3x + 6

a. Tìm m để đường thẳng (d_m) song song với đường thẳng (d_1).

b. Tìm m để 3 đường thẳng đồng quy. Khi đó, vẽ 3 đường thẳng trên cùng một hệ toạ độ

Bài 6: Cho hàm số y = |x + 2| + |3 – x| + 1

a. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

b. Tìm m để phương trình |x + 2| + |3 – x| + m = 0 có hai nghiệm phân biệt.

Bài 7: Cho hàm số $y = 3x^2 - 2|x| + 1$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Biện luận theo m số nghiệm của thương trình $3x^2 - 2|x| - m = 0$.

Bài 8: Cho hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 2$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b. Xác định các giá trị của m để phương trình $\left|\dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 2\right| = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{|-x + 2|}$ là:

a. (–∞; 2] b. (2; +∞) c. [2; +∞)
d. R

2. Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{2x + 3}}{(2x + 3)(x - 1)}$ là:

a. $R \setminus \{-\dfrac{3}{2}; 1\}$ b. $[-\dfrac{3}{2}; +\infty) \setminus \{1\}$ c. $(-\dfrac{3}{2}; +\infty) \setminus \{1\}$

3. Hàm số $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ là hàm số:

a. Chẵn b. Lẻ c. Không chẵn, không lẻ

4. Hàm số $f(x) = \sqrt{4-x} - \sqrt{4+x}$ là hàm số:

a. Chẵn b. Lẻ c. Không chẵn, không lẻ

5. Hàm số $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x}$ là hàm số:

a. Chẵn b. Lẻ c. Không chẵn, không lẻ

6. Parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$ có đỉnh là:

a. $I\left(-\dfrac{1}{3}; 2\right)$ b. $I\left(\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}\right)$ c. $I\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

7. Cho hai đường thẳng (d_1): $y = \dfrac{1}{3}x + 1$ và (d_2): $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{5}{3}$. Toạ độ gia

điểm của (d_1) và (d_2) là:

a. $(-2; \dfrac{1}{3})$ b. $(3; -\dfrac{1}{2})$

c. $(1; \dfrac{1}{3})$ d. $(2; -\dfrac{1}{3})$

8. Hàm số nào trong các hàm số sau có đồ thị trùng với đường thẳng $y = x -$

a. $y = \sqrt{(x-2)^2}$ b. $y = \dfrac{x^2-4}{x+2}$

c. $y = x^2 - 2 + x(1-x)$ d. $y = \dfrac{x(x-2)}{x}$

9. Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau là trục đối xứng của đ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$

a. $x = 4$ b. $x = -4$

c. $x = 2$ d. $x = -2$

10. Đường thẳng song song với đường thẳng $y = \sqrt{2}x$ là:

a. $y = 1 - \sqrt{2}x$ b. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}x - 3$

c. $y + \sqrt{2}x = 3$ d. $y - \dfrac{1}{\sqrt{2}}x = 1$

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

§1. HÀM SỐ

Bài 1:

a. TXĐ R

b. $[1; 5]$

c. $R \setminus \{\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\}$

d. Biểu thức $\sqrt{-(x-2)^2(x+1)^2(x+5)^2}$

có nghĩa khi: $-(x-2)^2(x+1)^2(x+5)^2 \geq 0$

Suy ra: $x - 2 = 0$ hoặc $x + 1 = 0$ hoặc $x + 5 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = -5$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \{2; -1; -5\}$

e. Biểu thức $\sqrt{-2x^2 + 22x - 56}$ có nghĩa khi $-2x^2 + 22x - 56 \geq 0$

$\Leftrightarrow -2(x-4)(x-7) \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-7) \leq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 \leq 0 \\ x - 7 \geq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 7 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x \geq 7 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x \geq 4 \\ x \leq 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 4 \leq x \leq 7$

Tập xác định của hàm số $f_1(x) = \sqrt{-2x^2 + 22x - 56}$ là $D_1 = [4; 7]$

Tương tự, tập xác định của hàm số $f_2(x) = \sqrt{-x^2 + 13x - 40}$ là $D_2 = [5; 8]$

Tập xác định của hàm số $f(x) = \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ là $D = (D_1 \cap D_2) \setminus \{5; 8\} = (5; 7]$

f. Biểu thức $\dfrac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$ có nghĩa khi $|x + 1| - |x - 1| \neq 0$

Ta có: $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 & \text{nếu } x \geq -1 \\ -x - 1 & \text{nếu } x < -1 \end{cases}$

$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$\lvert x + 1\rvert$	$-x - 1$	0	$x + 1$	|	$x + 1$
$\lvert x - 1\rvert$	$-x + 1$	|	$-x + 1$	0	$x - 1$
$\lvert x + 1\rvert - \lvert x - 1\rvert$	-2	-2	$2x$	2	2

Suy ra: $|x + 1| - |x - 1| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Vậy, tập xác định $D = R \setminus \{0\}$

Bài 2

a. Tập xác định D = $(-\infty; 9] \cup [10; 20]$

b. $f(-2) = \frac{1}{49}$; $f(1) = \sqrt{7}$; $f(5) = \sqrt{10}$; $f(12) = \sqrt{42}$

Bài 3

a. Biểu thức $\sqrt{x + \sqrt{x-1}}$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x + \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

Tập xác định D = $[1; +\infty)$

b. Trên Casio FX–570 MS:

$\boxed{(}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{\text{A}}\ \boxed{+}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{(}\ \boxed{\text{ALPHA}}\ \boxed{\text{A}}\ \boxed{+}\ 1$

$\boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{)}\ \boxed{\text{CALC}}$

Máy hỏi A? nhập $\boxed{3}\ \boxed{=}$ 2,24 ; $f(3) \approx 2,24$

Máy hỏi A? nhập $\boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{3}\ \boxed{=}$ 1,84 ; $f(\sqrt{3}) \approx 1,84$

Máy hỏi A? nhập $\boxed{\text{SHIFT}}\ \boxed{\pi}\ \boxed{=}$ 2,28 ; $f(\pi) \approx 2,28$

Máy hỏi A? nhập $\boxed{1,2345}\ \boxed{=}$ 1,65 ; $f(1,2345) \approx 1,65$

Bài 4

a. Để hàm số có tập xác định là R thì biểu thức:

$\frac{x+1}{3x^2 - 2x + m}$ có nghĩa với $\forall x \in R$

Suy ra: $3x^2 - 2x + m \neq 0 \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow \quad 3x^2 - 2x + m = 0$ vô nghiệm

$\Rightarrow \quad \Delta' = 1 - 3m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{3}$

Vậy $m > \frac{1}{3}$ thì tập xác định của hàm số là R.

b. Khi $m = -1$, $y = \frac{x+1}{3x^2 - 2x - 1}$. Tập xác định D = $R \setminus \{-\frac{1}{3}; 1\}$

$M_1(3; \frac{1}{5})$ và $M_4(\frac{1}{2}; -\frac{6}{5})$ thuộc đồ thị của hàm số.

$M_2(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$ và $M_2(2; \frac{1}{2})$ không thuộc đồ thị của hàm số.

Bài 5

a. Hàm số nghịch biến $(-\infty; \frac{5}{4})$ và đồng biến $(\frac{5}{4}; +\infty)$.

b. Hàm số đồng biến $(-\infty; 2)$ và nghịch biến $(2; +\infty)$.

c. $\forall x_1, x_2 \in R \setminus \{1\}$ và $x_1 \neq x_2$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \left(\frac{-3x_2 - 1}{x_2 - 1} - \frac{-3x_1 - 1}{x_1 - 1}\right)\frac{1}{(x_2 - x_1)} = \frac{4}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)}$$

– Trên $(-\infty; 1)$ ta có $\begin{cases} x_1 < 1 \\ x_2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 < 0 \\ x_2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$

Suy ra: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$.

– Trên $(1; +\infty)$ ta có $\begin{cases} x_1 > 1 \\ x_2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 > 0 \\ x_2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0$

Suy ra: $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.

d. Hàm số nghịch biến $(-\infty; 1)$ và đồng biến $(1; +\infty)$

Bài 6

a. Hàm số chẵn

b. Hàm số lẻ

c. Hàm số chẵn

d. $R \setminus \{1; 2\}$ không phải là tập đối xứng nên hàm số đã cho không có tính chẵn lẻ

e. Hàm số lẻ

f. Hàm số lẻ

Bài 7

a. $f(-x) = u(-x) + v(-x) = u(x) - v(x)$

b. Ta có: $u(x) + v(x) = f(x)$

$u(x) - v(x) = f(-x)$

Suy ra: $u(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ và $v(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

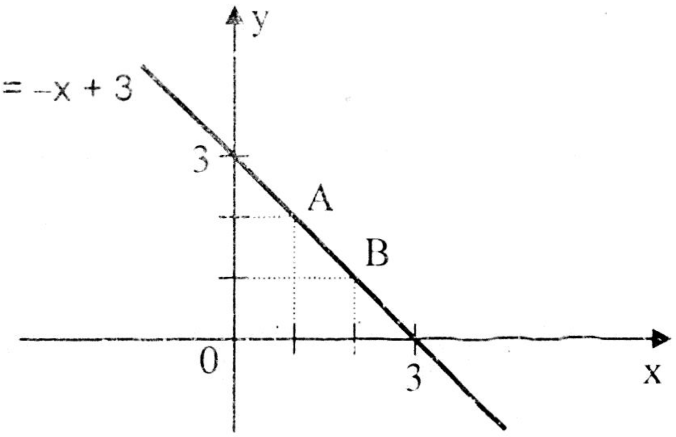
Khi $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ thì $f(-x) = \frac{-x - 1}{-x + 1}$

Suy ra: $u(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ và $v(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$

§2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

Bài 1

Phương trình đường thẳng y = –x + 3



Bài 2

a. Đồ thị hàm số y = ax + b đi qua hai điểm A(1; 4) và B(2; 1) nên:

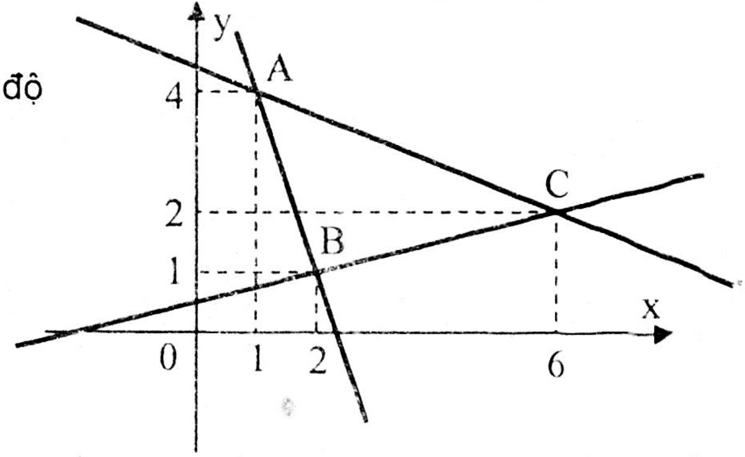
$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 1 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 7 \end{cases}$$

Đường thẳng có phương trình: y = –3x + 7

b. $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ đường thẳng có phương trình $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}$

c. $\begin{cases} a = -\dfrac{2}{5} \\ b = \dfrac{22}{5} \end{cases}$ đường thẳng có phương trình $y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{22}{5}$

d. Vẽ trên một hệ toạ độ



Bài 3

a. m = 1 b. m = 4 c. m = 2

Bài 4

a. m = 2

b. Để hai đường thẳng cắt nhau thì m ≠ 2.

Toạ độ giao điểm là nghiệm của hệ $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = mx - 3 \end{cases}$

Giao điểm của hai đường thẳng thuộc trục hoành

Suy ra: $\begin{cases} 2x + 5 = 0 \\ mx - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ m = -\dfrac{6}{5} \end{cases}$

Vậy $m = -\dfrac{6}{5}$

Bài 5

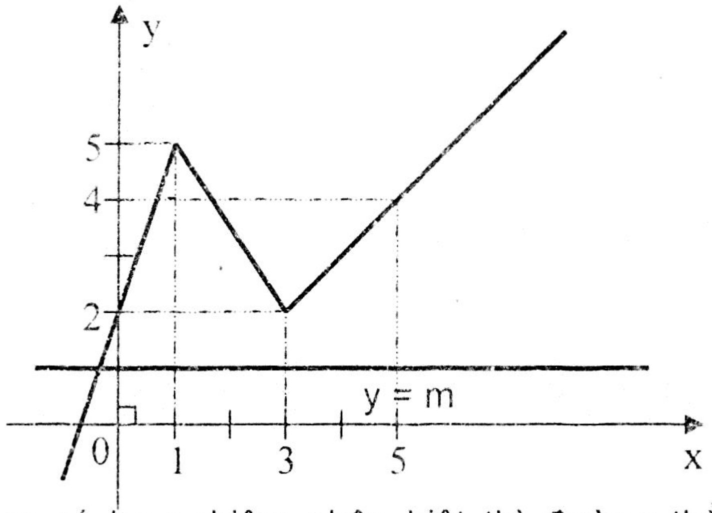
a. $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$ b. $y = -5$

Bài 6

a. $k = \dfrac{7}{9}$ b. $k = 9$

Bài 7

a.



b. Để phương trình f(x) = m có ba nghiệm phân biệt thì đường thẳng y = m cắt đồ thị y = f(x) tại ba điểm phân biệt

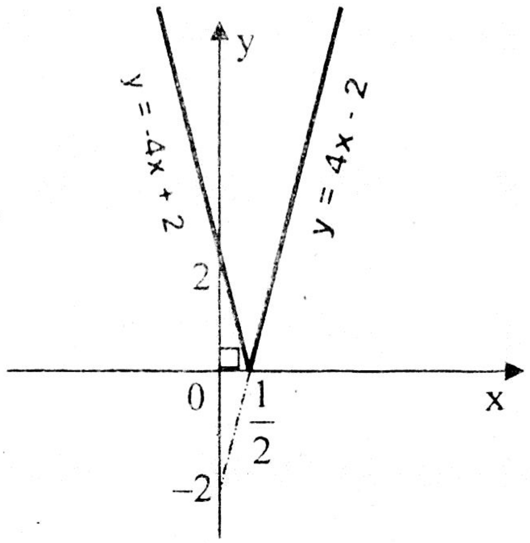
Suy ra: $2 < m < 5$

§3 HÀM SỐ $y = |x|$, $y = |ax + b|$, $y = [x]$

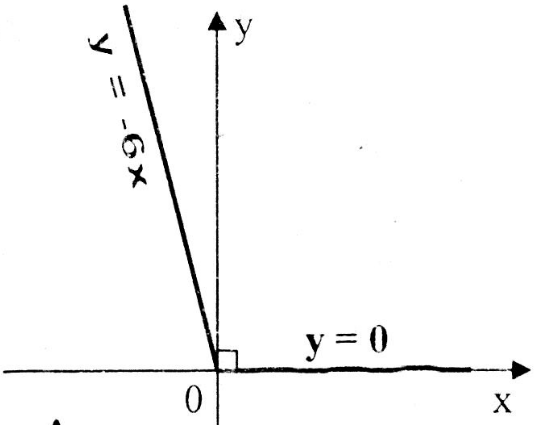
Bài 1

a. $y = -2|2x - 1| = \begin{cases} -4x + 2 & \text{khi } x \geq \dfrac{1}{2} \\ 4x - 2 & \text{khi } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$

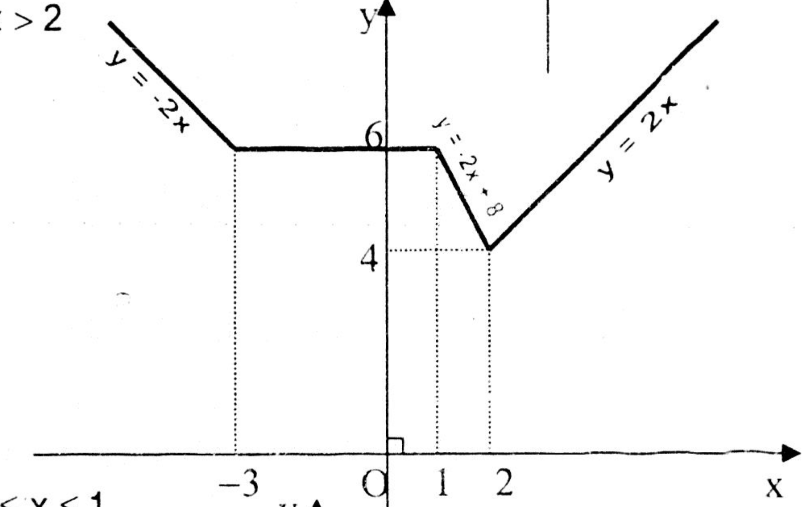
x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



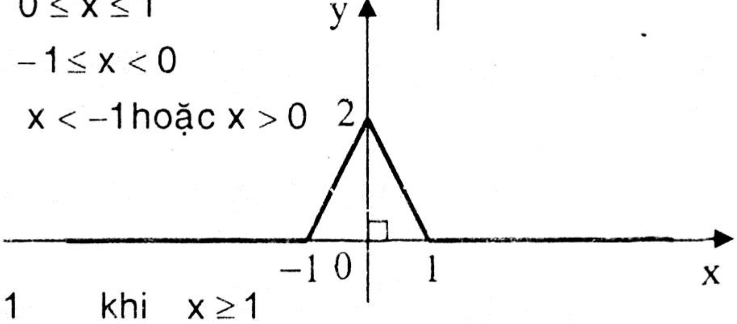
b. $y = |3x| - 3x = \begin{cases} 0 & \text{khi } x \geq 0 \\ -6x & \text{khi } x < 0 \end{cases}$



c. $y = \begin{cases} -2x & \text{khi } x \leq 3 \\ 6 & \text{khi } -3 < x \leq 1 \\ -2x + 8 & \text{khi } 1 < x \leq 2 \\ 2x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$

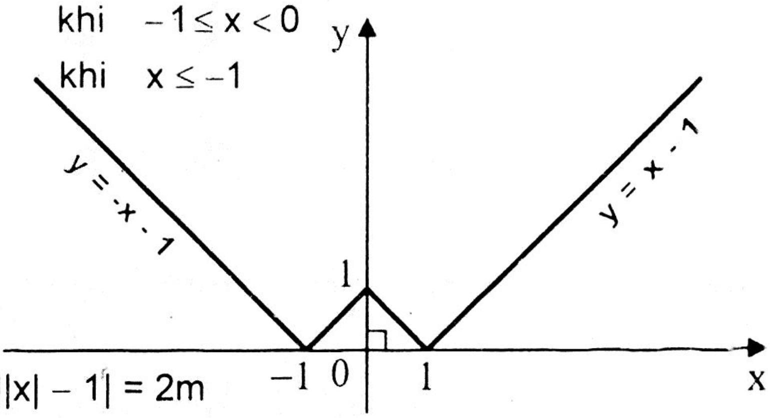


d. $y = \begin{cases} 2 - 2x & \text{khi } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 + 2x & \text{khi } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{khi } x < -1 \text{ hoặc } x > 0 \end{cases}$



Bài 2

a. $y = ||x| - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ -x + 1 & \text{khi } 0 \leq x < 1 \\ x + 1 & \text{khi } -1 \leq x < 0 \\ -x - 1 & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$



b. $||x| - 1| - 2m = 0 \Leftrightarrow ||x| - 1| = 2m$

– Khi $m > \frac{1}{2}$: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt

– Khi $m = \frac{1}{2}$: Phương trình có 3 nghiệm phân biệt

– Khi $0 < m < \frac{1}{2}$: Phương trình có 4 nghiệm phân biệt

– Khi $m = 0$: Phương trình có 2 nghiệm $x = 1$; $x = -1$

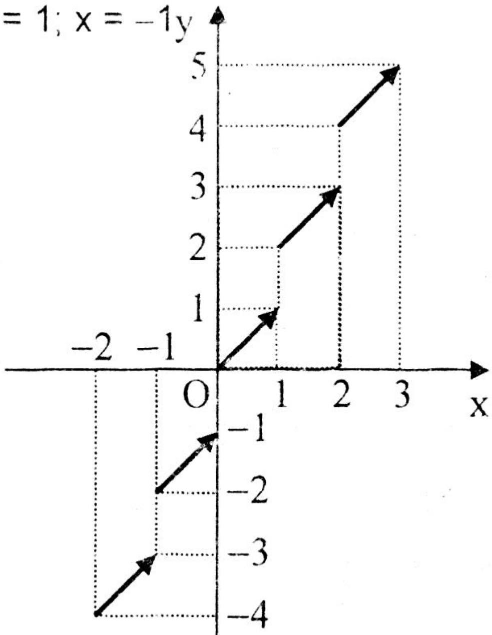
– Khi $m < 0$: Phương trình vô nghiệm

Bài 3

a. $y = x + [x]$

$\forall k \in Z$: $k \le x < k + 1$.

Suy ra: $y = x + k$ với $k \le x < k + 1$ $(k \in Z)$



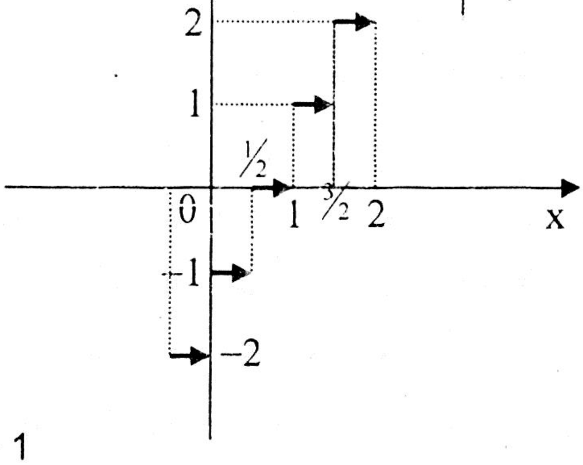
b. $y = [2x - 1]$

$\forall k \in Z$: $k \le 2x - 1 < k + 1$

$\Leftrightarrow \frac{k}{2} + \frac{1}{2} \le x < \frac{k}{2} + 1$

Suy ra: $y = [2x - 1] = k$

với $\frac{k}{2} + \frac{1}{2} \le x < \frac{k}{2} + 1$



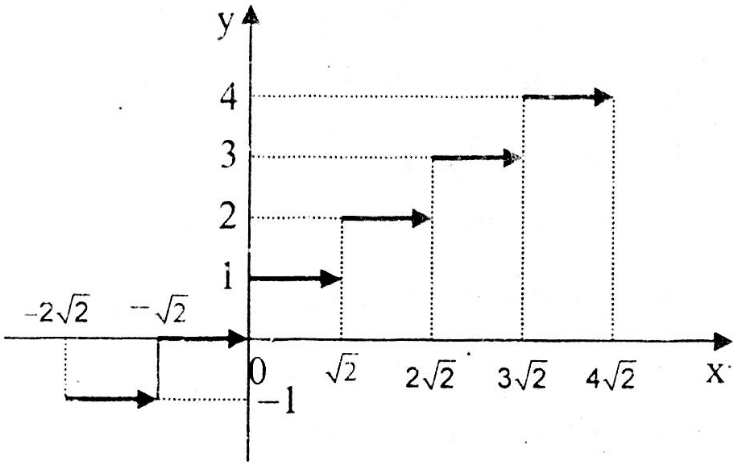
c. $y = \left[\frac{x}{\sqrt{2}}\right] + 1$

$\forall k \in Z$ ta có $k \le \frac{x}{\sqrt{2}} < k + 1$

$\Leftrightarrow k\sqrt{2} \le x \le k\sqrt{2} + \sqrt{2}$

Suy ra: $y = k + 1$

với $x \in [k\sqrt{2}\,;\, k\sqrt{2} + \sqrt{2}\,]$



§4. HÀM SỐ BẬC HAI

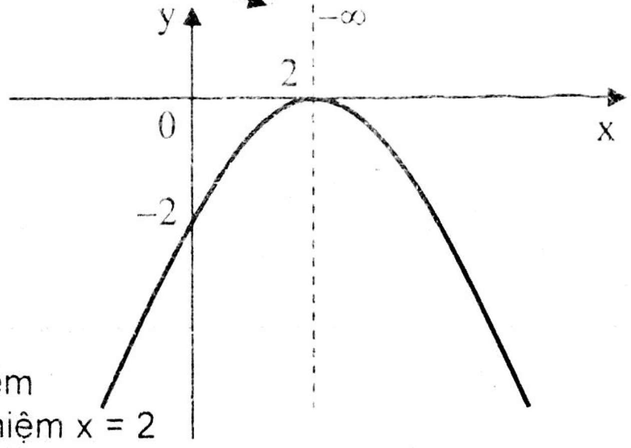
Bài 1

a. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Đồ thị



b. $x^2 - 4x + 4 + 2m = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = -2m$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = m$

Khi $m > 0$ phương trình vô nghiệm

Khi $m = 0$ phương trình có 1 nghiệm $x = 2$

Khi $m < 0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt

Bài 2

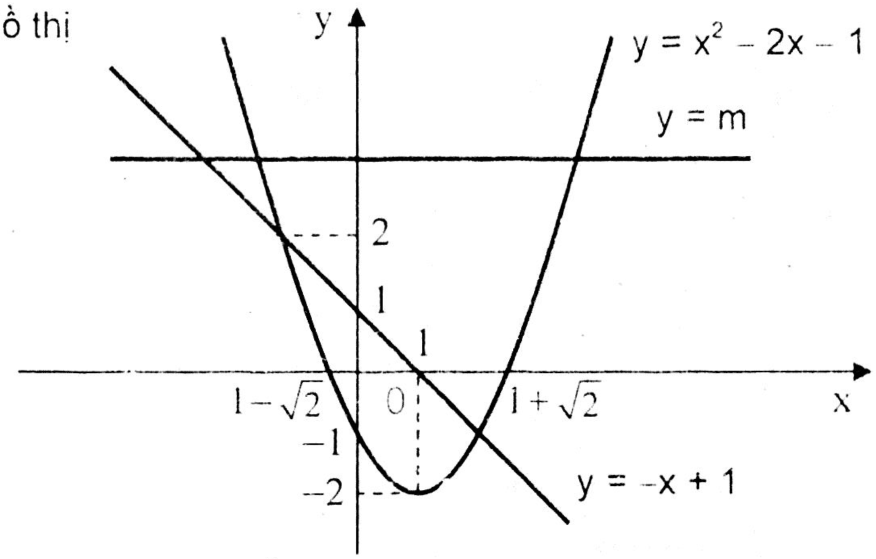
a. $y = x^2 - 2x - 1$ và $y = -x + 1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Đồ thị



b. Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình

$x^2 - 2x - 1 = -x + 1$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Toạ độ giao điểm A(−1; 2) và (2; −1)

c. Đường thẳng y = m cắt hai đồ thị trên khi $m \ge -2$

Bài 3

a. (P): $y = ax^2 + bx + c \ (a \ne 0)$

A, B, C thuộc (P), ta được:

$$\begin{cases} c = -1 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

(P): $y = x^2 - x - 1$

b. $D \in (P)$ nên: $9a + 3b + c = 0$

Đỉnh của (P) có toạ độ: $\begin{cases} x = -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ y = a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a \\ a + b + c = 4 \end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases} b = -2a \\ 9a + 3b + c = 0 \\ a + b + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$

(P): $y = -x^2 + 2x + 3$

Bài 4

a. $y = -x^2 + 2|x| + 3$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua Oy

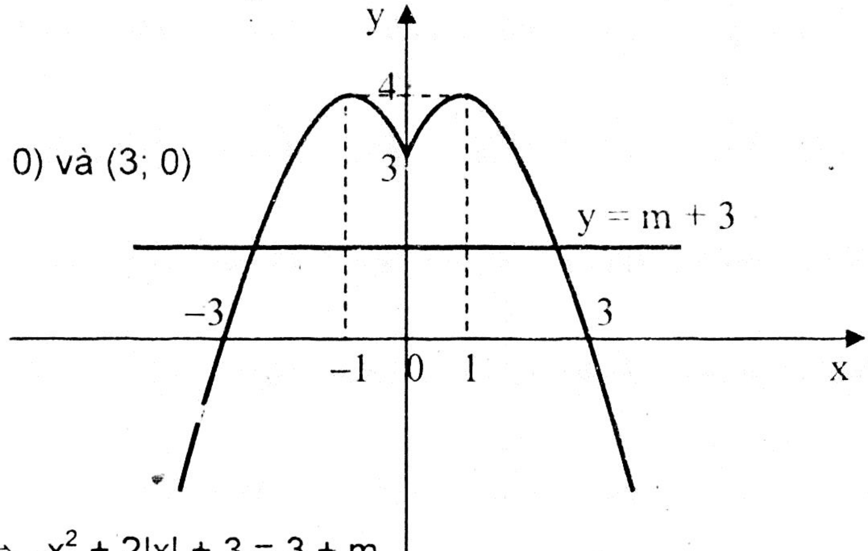
$$-x^2 + 2|x| + 3 = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & \text{khi} \quad x \ge 0 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{khi} \quad x < 0 \end{cases}$$

- Tập xác định D = R
- Chiều biến thiên

x	−∞		−1		0		1		+∞
y	−∞	↗	4	↘	3	↗	4	↘	−∞

- Đồ thị

Giao điểm với trục Ox: (−3; 0) và (3; 0)



b. $x^2 - 2|x| + m = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2|x| + 3 = 3 + m$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng y = m + 3 cắt đồ thị (C) tại 4 điểm phân biệt.

Suy ra: $3 < m + 3 < 4 \Leftrightarrow 0 < m < 1$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. CÂU HỎI

1. Tập xác định của hàm số y = f(x) là tập hợp tất cả các số x sao cho biểu thức f(x) có nghĩa.

Hàm số $y = \dfrac{x+1}{(x+1)(x^2+2)}$ có tập xác định $D = R \setminus \{-1\}$

$y = \dfrac{1}{x^2+2}$ có tập xác định $D_1 = R$

Hai hàm số này khác nhau về tập xác định.

2. Hàm số y = f(x) đồng biến trên (a; b) khi và chỉ khi:

$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0;\ \forall x_1, x_2 \in (a; b),\ x_1 \neq x_2$

Hàm số y = f(x) nghịch biến trên (a; b) khi và chỉ khi:

$\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0;\ \forall x_1, x_2 \in (a; b),\ x_1 \neq x_2$

3. Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số chẵn nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$

Hàm số y = f(x) với tập xác định D gọi là hàm số lẻ nếu với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$

$y = x^2 + |x| + 1$ là hàm số chẵn
$y = x^3$ là hàm số lẻ
$y = x^3 + x^2 + |x| + 1$ không là hàm chẵn, không là hàm lẻ
Gọi y = f(x) là hàm số chẵn, hàm số lẻ có tập xác định D
Khi đó $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$; $f(-x) = -f(x)$
Suy ra: $2f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0;\ \forall x \in D$
Vậy f(x) = 0 là số vừa là hàm số chẵn, vừa là hàm số lẻ.

4. Hàm số y = ax + b
– Khi a > 0 hàm số đồng biến trên R
– Khi a < 0 hàm số nghịch biến trên R

5. Hàm số y = |ax + b| với $a \neq 0$

Hàm số nghịch biến $(-\infty; -\dfrac{b}{a})$

Hàm số đồng biến $(-\dfrac{b}{a}; +\infty)$

6. Số nguyên a sao cho $a \le x < a + 1$ gọi là phần nguyên của x

Suy ra: $[x] = a;\ \forall x \in [a; a + 1),\ a \in Z$,

$[x] = x;\ \forall x \le x < x + 1,\ \forall x \in Z$

Suy ra: $\forall x \in Z$ thì $[x] = x$

7. Hàm số $y = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$

– Khi $a > 0$: Hàm số nghịch biến $(-\infty; -\frac{b}{2a})$

Hàm số đồng biến $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$

– Khi $a < 0$ Hàm số đồng biến $(-\infty; -\frac{b}{2a})$

Hàm số nghịch biến $(-\frac{b}{2a}; +\infty)$

8. Parabol (P) $y = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$

Toạ độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình của trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$

9. – Điều kiện để Parabol (P) $y = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt là $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

Toạ độ giao điểm $A\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$, $B\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; 0\right)$

– (P) cắt trục hoành tại một điểm khi $\Delta = 0$. Toạ độ giao điểm $I(-\frac{b}{2a}; 0)$

– (P) luôn cắt trục tung tại điểm C(0; c)

B. BÀI TẬP

Bài 1. Tìm tập xác định

a. $D = \left[\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$ b. $D = [-7; 2]$ c. $D = [-2; 2]$

d. Biểu thức $2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}} - \sqrt{x + 1}$ có nghĩa khi:

$$\begin{cases} x + 1 \ge 0 \\ x + 2 + 2\sqrt{x + 1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ (\sqrt{x + 1} + 1)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge -1$$

Tập xác định $D = [-1; +\infty)$

Bài 2

a. Để hàm số có tập xác định R thì biểu thức $\dfrac{x+1}{x^2-2(m+1)x+m^2-2m}$ c

nghĩa với $\forall x \in R$

Suy ra: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m \neq 0 \quad \forall x \in R$

$\Rightarrow \quad x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m = 0$ vô nghiệm

$\Rightarrow \quad \Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 2m) < 0$

$\Leftrightarrow \quad 4m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{4}$

Vậy $m < -\dfrac{1}{4}$ thì tập xác định của hàm số D = R

b. Gọi tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-2x+m}$ là D

Xét phương trình $x^2 - 2x + m = 0 \,(1)$

$\Delta' = 1 - m$

m	$-\infty$		1		$+\infty$
Δ'		$+$	0	$-$	

– Khi m > 1 thì $\Delta' < 0$, phương trình (1) vô nghiệm nên $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+m}$

có nghĩa với mọi $x \in R$

Suy ra D = R.

– Khi m = 1 thì $\Delta' = 0$, phương trình (1) có nghiệm x = 1, biểu thức

$\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+m}$ có nghĩa với $x \neq 1$

Suy ra $D = R \setminus \{1\}$.

– Khi m < 1 thì $\Delta' > 0$, phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$x_1 = 1 + \sqrt{1-m}$ và $x_2 = 1 - \sqrt{1-m}$

Biểu thức $\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+m}$ có nghĩa với $x \neq x_1$ và $x \neq x_2$

Suy ra $D = R \setminus \{x_1; x_2\}$.

c. Gọi tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-m+1} - \dfrac{x}{\sqrt{2m+1-x}}$ là D

Ta có: $\forall x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x - m + 1 \geq 0 \\ 2m + 1 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m - 1 \\ x < 2m + 1 \end{cases} \quad (1)$

Xét: $2m + 1 - (m - 1) = m + 2$

– Khi $m + 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -2$ thì $2m + 1 \leq m - 1$

Từ (1) ta có $D = \varnothing$

– Khi $m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -2$ thì $2m + 1 > m - 1$

Từ (1) ta có $m - 1 \leq x < 2m + 1$

Suy ra: $D = [m - 1; 2m + 1)$.

Để hàm số xác định trên [2; 3] thì $[2; 3] \subseteq D$

Suy ra: $\begin{cases} m - 1 \le 2 \\ 3 < 2m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \le 3$

Vậy: $1 < m \le 3$ hàm số xác định [2; 3]

Bài 3

1. y = f(x) và y = g(x) là hai hàm đồng biến trên khoảng (a; b)

a. $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ và $\dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$

$\Rightarrow \dfrac{(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_2) + g(x_2))}{x_1 - x_2} > 0$

Suy ra: y = f(x) + g(x) đồng biến (a; b).

b. Xét hàm số f(x) = 2x + 1 đồng biến trên R

Chọn g(x) = 3x đồng biến trên R

Thì y = f(x) – g(x) = –x + 1 nghịch biến trên R

Chọn g(x) = x + 1 đồng biến trên R

Thì y = f(x) – g(x) = x đồng biến trên R

Vậy: Không có kết luận gì về chiều biến thiên của hàm số y = f(x) – g(x) trên khoảng (a; b).

2. y = f(x) và y = g(x) là hai hàm nghịch biến trên khoảng (a; b)

a. $\forall x_1, x_2 \in (a; b)$ và $x_1 \neq x_2$

Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ và $\dfrac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$

$\Rightarrow \dfrac{f(x_1) + g(x_1) - (f(x_2) + g(x_2))}{x_1 - x_2} < 0$

$\Rightarrow$ y = f(x) + g(x) nghịch biến trên (a; b)

b. Xét f(x) = –3x + 1 và chọn g(x) = –4x nghịch biến trên R

Thì y = f(x) – g(x) = x + 1 đồng biến trên R

Chọn g(x) = –x nghịch biến trên R

Thì y = f(x) – g(x) = –2x + 1 nghịch biến trên R

Vậy: Không có kết luận gì về chiều biến thiên của hàm số y = f(x) – g(x).

Bài 4

1. Khi y = f(x) và y = g(x) là hai hàm số chẵn trên cùng một tập xác định D

Ta có: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và f(–x) = f(x), g(–x) = g(x)

a. y = f(x) + g(x)

y(–x) = f(–x) + g(–x) = f(x) + g(x) = y(x)

Suy ra: y = f(x) + g(x) là hàm số chẵn trên tập D.

b. y = f(x) – g(x)

y(–x) = f(–x) – g(–x) = f(x) – g(x) = y(x)

Suy ra: y = f(x) – g(x) là hàm số chẵn trên tập D.

c. $y = f(x).g(x)$
$y(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = y(x)$
Suy ra: $y = f(x).g(x)$ là hàm số chẵn trên tập D.

2. Khi $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số lẻ trên cùng một tập xác định D
Ta có: $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$

a. $y = f(x) + g(x)$
$y(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -y(x)$
Suy ra: $y = f(x) + g(x)$ là hàm số lẻ trên tập D.

b. $y = f(x) - g(x)$
$y(-x) = f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x)) = -y(x)$
Suy ra: $y = f(x) - g(x)$ là hàm số lẻ trên tập D.

c. $y = f(x).g(x)$
$y(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = y(x)$
Suy ra: $y = f(x).g(x)$ là hàm số chẵn trên tập D,

Bài 5

a. $(d_m) \,//\, (d_1) \Leftrightarrow m = 0$

b. Toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = 3x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Suy ra: $A(-1; 3)$
Để (d_m), (d_1), (d_2) đồng quy thì $A \in (d_m)$
Suy ra: $3 = -(m - 2) + 2m + 3 \Leftrightarrow m = -2$

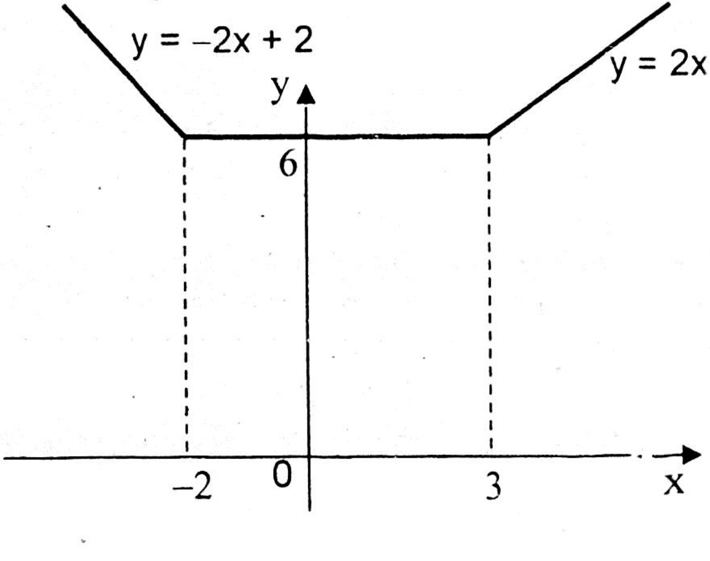
Bài 6

a. $$y = \begin{cases} -2x + 2 & \text{khi} \quad x < -2 \\ 6 & \text{khi} \quad -2 \le x < 3 \\ 2x & \text{khi} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\rightarrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị:



b. Xét phương trình: $|x + 2| + |3 - x| + m = 0$

$\Leftrightarrow |x + 2| + |3 - x| + 1 = 1 - m$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì đường thẳng $y = 1 - m$ cắt đồ thị hàm số $y = |x + 2| + |3 - x| + 1$ tại hai điểm phân biệt.

Suy ra: $1 - m > 6 \Leftrightarrow m < -5$

Bài 7

a. $y = 3x^2 - 2|x| + 1$

– Tập xác định D = R

– $\forall x \in R$ thì $-x \in R$ và $y(-x) = 3(-x)^2 - 2|x| + 1 = 3x^2 - 2|x| + 1 = y(x)$

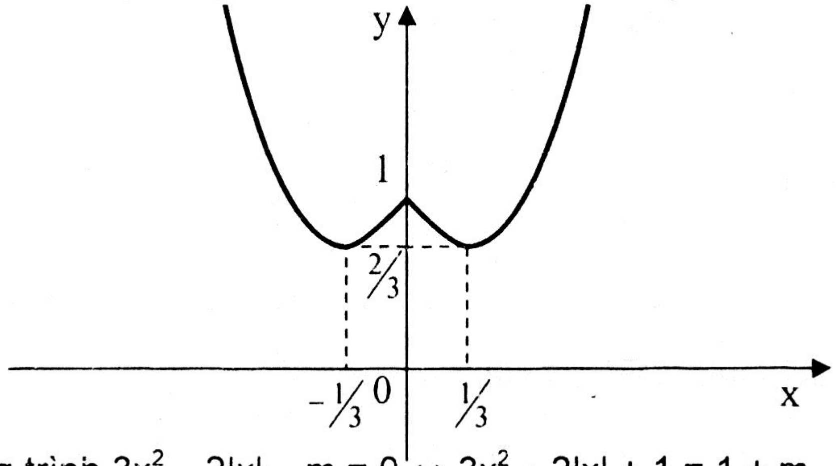
Suy ra: $y = 3x^2 - 2|x| + 1$ là hàm số chẵn nên đồ thị đối xứng nhau qua trục tung.

Khi $x \geq 0$ ta có $y = 3x^2 - 2x + 1$

– Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
y	$+\infty$				1				$+\infty$
		↘		↗		↘		↗	
			$\frac{2}{3}$				$\frac{2}{3}$		

– Đồ thị:



b. Xét phương trình $3x^2 - 2|x| - m = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2|x| + 1 = 1 + m$

– Khi $m > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt

– Khi $m = 0$, phương trình có ba nghiệm phân biệt

– Khi $-\frac{1}{3} < m < 0$, phương trình có bốn nghiệm phân biệt

– Khi $m = -\frac{1}{3}$, phương trình có hai nghiệm $x = \frac{1}{3}$; $x = -\frac{1}{3}$

– Khi $m < -\frac{1}{3}$, phương trình vô nghiệm

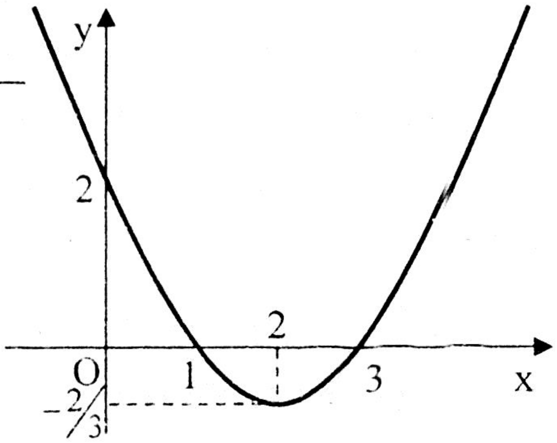
Bài 8

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$

– Tập xác định D = R

– Chiều biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\dfrac{2}{3}$	↗	$+\infty$



b. Từ đồ thị $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$

Suy ra đồ thị y $= |\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2|$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 2 & \text{khi } \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 2 \geq 0 \\ -\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{8}{3}x - 2 & \text{khi } \dfrac{2}{3}x^2 - \dfrac{8}{3}x + 2 < 0 \end{cases}$$

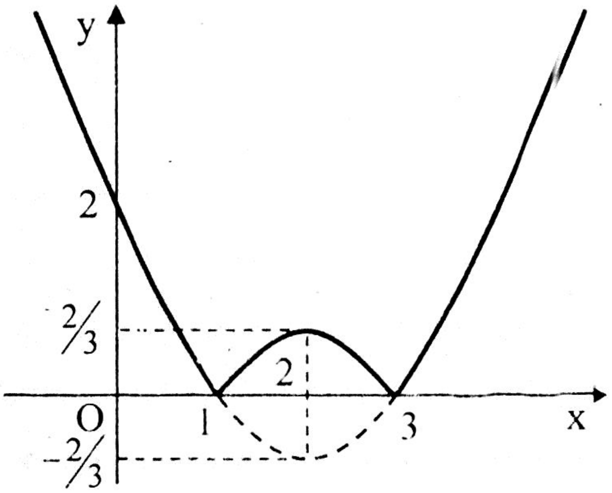
Gọi (C_o) là phần đồ thị $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$ nằm phía trên trục Ox

Gọi (C'_o) đối xứng với đồ thị $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2$ nằm dưới Ox qua Ox

Suy ra: Đồ thị của $y = |\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2|$ là $(C') = (C_o) \cup (C'_o)$

Phương trình $|\frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 2| = m$ có 4 nghiệm phân biệt thì đường thẳng y = m cắt (C') tại 4 điểm phân biệt

Suy ra: $0 < m < \frac{2}{3}$



C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. d); 2. c); 3. a); 4. b); 5. c);
6. c); 7. a); 8. c); 9. c); 10. d)

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

§1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

– Dạng phương trình: $ax + b = 0$ (1)
Trong đó x là ẩn; a, b là hằng số
– Cách giải và biện luận:
(1) $\Leftrightarrow ax = -b$
+ Nếu $a \neq 0$ thì phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x = -\dfrac{b}{a}$
+ Nếu $a = 0$ khi đó (1) $\Leftrightarrow 0x = -b$
. Nếu $b = 0$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$
. Nếu $b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Dạng 1: Giải và biện luận phương trình dạng ax + b = 0

Phương pháp

Để giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$, chúng ta tiến hành:
– Biến đổi phương trình về dạng $ax = -b$
– Xét các trường hợp xảy ra của a và b như ở phần tóm tắt lý thuyết
– Kết luận

Bài 1: *Giải và biện luận phương trình $m(x + 2) = 3x + 1$ (*)*

Giải:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (m - 3)x = 1 - 2m$

a. Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m \neq 3$ khi đó (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{1-2m}{m-3}$

b. Nếu $m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 3$ khi đó (*) $\Leftrightarrow 0x = -5$
Vậy phương trình vô nghiệm

Kết luận: Với $m \neq 3$, phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1-2m}{m-3}$
Với $m = 3$, phương trình vô nghiệm

Bài 2: *Giải và biện luận phương trình: $m^2(x + 1) = 4x + 2m$ (*)*

Giải:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = 2m - m^2$

a. Nếu $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$.

Khi đó (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2m - m^2}{m^2 - 4} \Leftrightarrow x = -\dfrac{m}{m+2}$

b. Nếu $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ hoặc $m = -2$

Với $m = 2$, phương trình (*) trở thành $0x = 0$. Vậy phương trình có nghiệm với mọi $x \in R$.

Với $m = -2$, phương trình (*) trở thành $0x = -4$. Vậy phương trình vô nghiệm.

Kết luận: Với $m \neq \pm 2$, phương trình có nghiệm $x = -\dfrac{m}{m+2}$

Với $m = 2$, phương trình có vô số nghiệm $x \in R$

Với $m = -2$, phương trình vô nghiệm

Bài 3: *Giải và biện luận phương trình:* $(m^2 + 2)(x - 1) = (1 + m)x + 2$ (*)

Giải:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow m^2x + 2x - m^2 - 2 = x + mx + 2$

$\Leftrightarrow (m^2 - m + 1)x = m^2 + 4$

Mặt khác: $m^2 - m + 1 = (m - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} > 0\ \forall m$

Do đó: (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{m^2 + 4}{m^2 - m + 1}$

Vậy, $\forall m$ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m^2 + 4}{m^2 - m + 1}$

Bài 4: *Giải và biện luận phương trình:* $a(ax + 2b^2) - a^3 = b^2(x + a)$ (*)

Giải:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow a^2x + 2ab^2 - a^3 = b^2x + ab^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - b^2)x = a(a^2 - b^2)$

a. Nếu $a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow x = a$

b. Nếu $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow 0x = 0$

Vậy phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$

Kết luận: Với $a \neq \pm b$, thì phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x = a$

Với $a = \pm b$, thì phương trình có vô số nghiệm $x \in R$

Bài 5: *Giải và biện luận phương trình:* $(a^2 - b^2)x = a(a - b^2)$ (*)

Giải

a. Nếu $a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow x = \dfrac{a(a - b^2)}{a^2 - b^2}$

b. Nếu $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$. Khi đó (*) $\Leftrightarrow 0x = a(a - b^2)$

Ta có: $a(a - b^2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = b^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a - a^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 1 \end{array}\right.$

Vậy: Nếu $a = b = 0$; $a = b = 1$; $a = -b = 1$ thì phương trình nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

Kết luận: Nếu $a = \pm b \neq 0$, $a \neq 1$ thì phương trình vô nghiệm

Với $a = \pm b$, thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a(a-b^2)}{a^2-b^2}$

Với $a = b = 0$ hoặc $a = b = 1$ hoặc $a = -b = 1$ thì phương trình có vô số nghiệm $x \in R$

Với $a = \pm b \neq 0$ và $a \neq 1$ thì phương trình vô nghiệm

2. Dạng 2: Phương trình quy về dạng ax + b = 0

Phương pháp

* Đối với phương trình có thể đưa được về dạng tích:

$(a_1x + b_1)(a_2x + b_2) = 0$ (1) ta thực hiện:

– Biến đổi (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a_1x + b_1 = 0 & (2) \\ a_2x + b_2 = 0 & (3) \end{array}\right.$

– Giải và biện luận (2) và (3)

– Kết luận

Chú ý cần có sự kết hợp nghiệm của các trường hợp để có kết luận ngắn gọn, chính xác và đầy đủ

* Đối với phương trình có chứa mẫu thức

– Đặt điều kiện cho ẩn số để các mẫu thức khác không

– Quy đồng mẫu thức và đưa về dạng $ax + b = 0$ (4)

– Giải và biện luận phương trình (4) (chú ý kiểm tra so sánh giá trị nghiệm với điều kiện)

– Kết luận

* Đối với phương trình có chứa dấu trị tuyệt đối

– Mở dấu trị số tuyệt đối và đưa về dạng $ax + b = 0$

Cần chú ý: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu} \quad A \geq 0 \\ -A & \text{nếu} \quad A < 0 \end{cases}$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$$

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right. \end{cases} \text{ hoặc } |A| = B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases} \\ \begin{cases} A < 0 \\ A = -B \end{cases} \end{array}\right.$$

– Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$

– Kết luận

* Đối với một số phương trình chứa căn thức

– Ta sử dụng các phép biến đổi:

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow A = B \geq 0$$

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

để đưa phương trình về dạng $ax + b = 0$

– Giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$

– Kết luận

* Đối với các phương trình có chứa nhiều căn thức thì trước khi biến đổi ta nên đặt điều kiện cho các căn thức có nghĩa và bình phương 2 vế để khử căn (chú ý điều kiện để biến đổi 2 phương trình tương đương)

Bài 6: *Giải phương trình* $(3x - 5)^2 - (x - 3)^2 = 0$ *(*)*

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow (4x - 8)(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 8 = 0 \\ 2x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 2$; $x = 1$

Bài 7: *Giải và biện luận phương trình* $mx^2 - (2m - 1)x + m - 1 = 0$ *(*)*

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow (x - 1)(mx - m + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ mx = m - 1 \quad (**) \end{array}\right.$$

Giải và biện luận (**)

– Nếu $m = 0$ khi đó $(**) \Leftrightarrow 0x = -1$. Vậy (**) vô nghiệm

– Nếu $m \neq 0$ khi đó $(**) \Leftrightarrow x = \dfrac{m - 1}{m}$

Kết luận: Với $m = 0$, phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 1$

Với $m \neq 0$, phương trình có 2 nghiệm $x = 1$; $x = \dfrac{m - 1}{m}$

Bài 8: *Giải phương trình* $\dfrac{2x + 5}{x + 3} + \dfrac{3x - 2}{x} = 5$ *(*)*

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x + 3 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq -3$ và $x \neq 0$

$(*) \Leftrightarrow (2x + 5)x + (3x - 2)(x + 3) = 5x(x + 3)$

$\Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$ (thoả điều kiện)

Vậy phương trình có 1 nghiệm $x = -2$

Bài 9: *Giải và biện luận phương trình* $\dfrac{m}{x - 2} = 2m + 1$ *(*)*

Giải:

Điều kiện: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow m = (2m + 1)(x - 2)$

$\Leftrightarrow (2m + 1)x = 5m + 2$ (**)

– Nếu $2m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}$. Khi đó (**) $\Leftrightarrow x = \frac{5m+2}{2m+1}$

Với $\frac{5m+2}{2m+1} \neq 2 \Leftrightarrow 5m + 2 \neq 4m + 2 \Leftrightarrow m \neq 0$

– Nếu $2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$. Khi đó (**) $\Leftrightarrow 0x = -\frac{1}{2}$ (vô nghiệm)

Kết luận: Với $m \neq -\frac{1}{2}$ và $m \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \frac{5m+2}{2m+1}$

Với $m = -\frac{1}{2}$ hoặc $m = 0$, phương trình vô nghiệm

Bài 10: *Giải và biện luận* $\frac{x-m}{x-2} + \frac{x-3}{x} = 2$ *(*)*

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$ và $x \neq 0$

Khi đó: (*) $\Leftrightarrow (x - m)x + (x - 3)(x - 2) = 2x(x - 2)$

$\Leftrightarrow (m + 1)x = 6$ (**)

– Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi đó (**) $\Leftrightarrow x = \frac{6}{m+1}$ với $\begin{cases} \frac{6}{m+1} \neq 0 \\ \frac{6}{m+1} \neq 2 \end{cases}$

Ta có: $\frac{6}{m+1} \neq 0, \forall m \neq -1$; $\frac{6}{m+1} \neq 2 \Leftrightarrow m \neq 2$

– Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó (**) $\Leftrightarrow 0x = 6$ (vô nghiệm)

Kết luận: Với $m \neq -1$ và $m \neq 2$ phương trình có nghiệm $x = \frac{6}{m+1}$

Với $m = -1$ hoặc $m = 2$, phương trình vô nghiệm

Bài 11: *Giải phương trình:* $|x - 4| = 3x - 6$ *(*)*

Giải:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x - 4 = 3x - 6 \\ x - 4 = -3x + 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2}$

Bài 12: *Giải và biện luận:* $|mx + 1| = |2x + m - 3|$ *(*)*

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 1 = 2x + m - 3 \\ mx + 1 = -2x - m + 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m - 2)x = m - 4 & (1) \\ (m + 2)x = -m + 2 & (2) \end{array}\right.$$

– Giải và biện luận (1)

Với m = 2, phương trình (1) vô nghiệm

Với m ≠ 2, phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{m-4}{m-2}$

– Giải và biện luận (2)

Với m = –2, phương trình (2) vô nghiệm

Với m ≠ –2, phương trình (2) có nghiệm $x = \dfrac{-m+2}{m+2}$

Kết luận: Với m = 2, phương trình đã cho có 1 nghiệm x = 0

Với m = –2, phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = \dfrac{3}{2}$

Với m ≠ ±2,

phương trình đã cho có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m-4}{m-2} \\ x = \dfrac{-m+2}{m+2} \end{array}\right.$

Bài 13: *Giải và biện luận: |x – 1| = mx – 1 (*)*

Giải:

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 = mx-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 < 0 \\ -x+1 = mx-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geq 1 \\ (m-1)x = 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} x < 1 \\ (m+1)x = 2 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

– Giải và biện luận (1)

Nếu m – 1 = 0 ⇔ m = 1. Khi đó (1) ⇔ 0x = 0.

Vậy hệ (1) vô số nghiệm x ≥ 1

Nếu m – 1 ≠ 0 ⇔ m ≠ 1. Khi đó (1) ⇔ x = 0 (loại)

Vậy hệ (1) vô nghiệm

– Giải và biện luận (2)

Nếu m + 1 = 0 ⇔ m = –1. Khi đó (2) ⇔ 0x = 2

Vậy hệ (2) vô nghiệm

Nếu m + 1 ≠ 0 ⇔ m ≠ –1. Khi đó (2) ⇔ $x = \dfrac{2}{m+1}$

Ta có: $\dfrac{2}{m+1} < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-m}{1+m} < 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 < 0$

⇔ |m| > 1 ⇔ m < –1 hoặc m > 1

Khi đó hệ (2) có nghiệm $x = \dfrac{2}{m+1}$

Kết luận: Với m = 1, phương trình có nghiệm với ∀x ≥ 1

Với $-1 \leq m < 1$, phương trình vô nghiệm

Với $m < -1$ hoặc $m \geq 1$, phương trình có nghiệm $\dfrac{2}{m+1}$

Bài 14: *Giải phương trình:*

a. $\sqrt{x^2 - 3x + 3} = 2 - x$ *(1)*

b. $\sqrt{x - 2} = 3 - \sqrt{x + 1}$ *(2)*

Giải:

a. Ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ x^2 - 3x + 3 = (2 - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình có nghiệm x = 1

b. Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3 \Leftrightarrow x - 2 + 2\sqrt{(x-2)(x+1)} + x + 1 = 9$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-2)(x+1)} = 10 - 2x \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)(x+1)} = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ (x-2)(x+1) = (5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ 9x = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ x = 3 (thoả mãn điều kiện)

Vậy phương trình có nghiệm x = 3

Bài 15: *Giải và biện luận phương trình:* $\sqrt{3m - x} = \sqrt{x + 3}$ *(*)*

Giải:

Ta có: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 3m - x = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x = \dfrac{3m - 3}{2} \end{cases}$

Nếu $\dfrac{3m-3}{2} < -3 \Leftrightarrow m < -1$. Khi đó phương trình (*) vô nghiệm

Nếu $\dfrac{3m-3}{2} \geq -3 \Leftrightarrow m \geq -1$. Khi đó phương trình (*) có 1 nghiệm $x = \dfrac{3(m-1)}{2}$

3. Dang 3: Tìm giá trị của tham số để phương trình bậc nhất một ẩn thoả mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

* Đối với phương trình ax + b = 0 (1)

Cần chú ý:

+ Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

+ Phương trình (1) có nghiệm ⇔ $\left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a \neq 0 \end{array}\right.$

+ Phương trình (1) có 1 nghiệm duy nhất ⇔ $a \neq 0$

+ Phương trình (1) có vô số nghiệm $x \in R$ ⇔ $a = b = 0$

* Đối với phương trình dạng f(x,m) = 0 (2) có thể quy được về dạng ax + b = 0

– Trước hết, tìm miền xác định D của phương trình và biến đổi (2) về dạng ax + b = 0

– Cần chú ý:

+ Phương trình (2) vô nghiệm ⇔ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \notin D \end{cases} \end{array}\right.$

+ Phương trình (2) có nghiệm ⇔ $\left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \in D \end{cases} \end{array}\right.$

+ Phương trình (2) có 1 nghiệm duy nhất ⇔ $\begin{cases} a \neq 0 \\ x = -\dfrac{b}{a} \notin D \end{cases}$

+ Phương trình (2) có vô số nghiệm ⇔ $a = b = 0$

Bài 16: *Với giá trị nào của m, các phương trình sau vô nghiệm*

a. $2(m-1)x - m(x-1) = 2m + 3$ (1)

b. $\dfrac{x+m}{x+1} + \dfrac{2x-1}{x-2} = 3$ (2)

Giải:

a. Ta có: (1) ⇔ $(m-2)x = m + 3$

Phương trình (1) vô nghiệm ⇔ $\begin{cases} m - 2 = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} m = 2 \\ m \neq -3 \end{cases}$ ⇔ $m = 2$

b. Điều kiện: $\begin{cases} x + 1 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$ ⇔ $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Khi đó: (2) ⇔ $(x+m)(x-2) + (2x-1)(x+1) = 3(x+1)(x-2)$

⇔ $(m+2)x = 2m - 5$

Phương trình (2) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2=0 \\ 2m-5 \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+2 \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{2m-5}{m+2} = -1 \\ \dfrac{2m-5}{m+2} = 2 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = -2 \\ m \neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \neq -2 \\ m = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m = 1 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m = -2$ hoặc $m = 1$ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét:

Khi giải bài toán này chúng ta có thể trình bày theo các bước giải và biện luận phương trình $ax + b = 0$

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow (m + 2)x = 2m - 5$ (3)

– Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, phương trình đã cho trở thành $0x = -9$. Vậy phương trình vô nghiệm

– Nếu $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$, phương trình đã cho trở thành $x = \dfrac{2m-5}{m+2}$

Để (2) vô nghiệm thì $\left[\begin{array}{l} \dfrac{2m-5}{m+1} = -1 \\ \dfrac{2m-5}{m+1} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 1$

Vậy, với $m = -2$ hoặc $m = 1$ thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 17: *Tìm m để các phương trình sau có nghiệm:*

a. $m^2(x - 1) = 4x - 3m + 2$ *(1)*

b. $\dfrac{2x+m}{x-1} - \dfrac{x+m-2}{x} = 1$ *(2)*

c. $\dfrac{2x+m+1}{\sqrt{x-1}} - 4\sqrt{x-1} = \dfrac{x-2m+1}{\sqrt{x-1}}$ *(3)*

Giải:

a. (1) $\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m^2 - 3m + 2$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m^2 - 3m + 2 \end{cases} \\ m^2 - 4 \neq 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(m-2)(m+2)=0\\(m-1)(m-2)=0\end{cases}\\(m-2)(m+2)\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=2 \text{ hoặc } m=-2\\ m=1 \text{ hoặc } m=2\end{cases}\\ m\neq \pm 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\\ m\neq\pm 2\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m \neq -2$

Vậy với $m \neq -2$, phương trình đã cho có nghiệm.

b. Điều kiện: $\begin{cases}x \neq 1\\ x \neq 0\end{cases}$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow (2x + m)x - (x + m - 2)(x - 1) = x(x - 1)$

$\Leftrightarrow 4x = 2 - m$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2-m}{4}$

Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2-m}{4} \neq 0\\ \dfrac{2-m}{4} \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m \neq 2\\ m \neq -2\end{cases}$

Vậy, với $m \neq \pm 2$ phương trình đã cho có nghiệm.

c. Điều kiện $x > 1$

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow 2x + m + 1 - 4(x - 1) = x - 2m + 1$

$\Leftrightarrow 3x = 3m + 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{3m+4}{3}$

Để phương trình có nghiệm thì $\dfrac{3m+4}{3} > 1$

$\Leftrightarrow 3m + 4 > 3 \Leftrightarrow m > -\dfrac{1}{3}$

Vậy với $m > -\dfrac{1}{3}$, phương trình đã cho có nghiệm.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận các phương trình:

a. $3(m - 2)x + 5 = 3x - 2(m + 1)$

b. $m^2(x - 2) = 4(x - m)$

c. $(m - 1)(x + 2) + 1 = m^2$

d. $x + 3m + 2 = m^2(x - 1)$

e. $(m^2 + 1)x = (3 + x)m - 2$

Bài 2. Giải và biện luận

a. $\dfrac{(m+1)x+m-2}{x+3} = m$ b. $\dfrac{x+m}{x-1} + \dfrac{x+3}{x} = 2$

c. $\dfrac{x-m}{x-1} + \dfrac{x-1}{x-m} = 2$

Bài 3. Giải và biện luận

a. $a(ax + 2b^2) = a^3 + b^2(x + a)$

b. $(a + b)^2x + 2a^2 = 2a(a + b) + (a^2 + b^2)x$

c. $\dfrac{a - x}{x - 1} + \dfrac{x - b}{x + 1} = \dfrac{b(x - 1) - 2}{1 - x^2}$

d. $\dfrac{1 - ax}{1 - x} + \dfrac{b}{x + 1} = \dfrac{a(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$

Bài 4. Giải các phương trình:

a. $(5x - 2)^2 - (x + 1)^2 = 0$ b. $4x^2 - 1 = (5 - 3x)(2x + 1)$

c. $\dfrac{2x + 5}{x + 3} + \dfrac{3x - 2}{x} = 5$ d. $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2 - x$

e. $\dfrac{2x + 3}{\sqrt{1 - 2x}} = \dfrac{|6 - x|}{\sqrt{1 - 2x}}$ f. $|x - 1| = 1 - x$

g. $|x - 3| + |2 - x| = 3$ h. $|2x - 5| - 3|x + 1| = 2$

i. $\sqrt{(x + 1)^2} + \sqrt{(x - 2)^2} = 3$

Bài 5. Giải và biện luận

a. $|x - 1| = mx + 2m - 1$ b. $|mx + 1| = |3x + m - 1|$

c. $|mx + 2| = 1 - x$

Bài 6. Tìm m để phương trình sau vô nghiệm

a. $(m + 1)^2x + 1 - m = (7m - 3)x$

b. $\dfrac{mx + m - 2}{x - m} = 3$

Bài 7. Với giá trị nào của m để phương trình có nghiệm

a. $m^2(x - 1) + m = x(3m - 2)$

b. $m^2(mx - 1) = 2m(2x + 1)$

c. $\dfrac{3x + m}{\sqrt{x - 1}} - 3\sqrt{x - 1} = \dfrac{2x + 2m - 5}{\sqrt{x - 1}}$

d. $\dfrac{mx^2}{|x| - 1} - m|x| = 2m + 1$

e. $\dfrac{(2m + 1)x + 3}{\sqrt{4 - x^2}} = \dfrac{(2m + 3)x + m - 2}{\sqrt{4 - x^2}}$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dạng hệ phương trình.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

Trong đó (1) và (2) là những phương trình bậc nhất hai ẩn

2. Cách giải.

Ngoài phương pháp thế và phương pháp cộng đại số ta có thể sử dụng quy tắc Crame

Tính: $$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Biện luận: – *Nếu* $D \neq 0$, *hệ có nghiệm duy nhất* $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} \\ y = \dfrac{D_y}{D} \end{cases}$

– *Nếu* $D = 0$ *và* $D_x \neq 0$ *hoặc* $D_y \neq 0$, *hệ vô nghiệm*

– *Nếu* $D = 0 = D_x = D_y$, *hệ có vô số nghiệm*

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Dạng 1: Giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn

Phương pháp

Để giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn ta có thể sử dụng các phương pháp:

- Phương pháp thế.
- Phương pháp cộng đại số.
- Phương pháp định thức (quy tắc Crame).

* Lưu ý: Để giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn, ta có thể sử dụng tuỳ ý 1 trong các phương pháp trên, tuy nhiên trong mỗi trường hợp sau, ta có thể dùng 1 phương pháp thích hợp.

- Nếu $a_1 = \pm a_2$ hoặc $b_1 = \pm b_2$ thì nên dùng phương pháp cộng đại số.
- Nếu $a_1 = \pm 1$ hoặc $b_1 = \pm 1$ thì nên dùng phương pháp thế.
- Nếu các hệ số phức tạp thì nên dùng phương pháp định thức.

Riêng đối với bài toán giải và biện luận hệ có chứa tham số thì nên dùng phương pháp định thức

Bài 1: *Giải và biện luận:* $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 2 \end{cases}$

Giải:

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = (m - 1)(m + 1)$

$D_x = \begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m^2 + m - 2 = (m - 1)(m + 2)$

$D_y = \begin{vmatrix} m & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m - 1$

Biện luận:

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ khi đó hệ có 1 nghiệm duy nhất:

$$x = \frac{(m-1)(m+2)}{(m-1)(m+1)} = \frac{m+2}{m+1} \quad \text{và} \quad y = \frac{m-1}{(m-1)(m+1)} = \frac{1}{m+1}$$

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = -1$ hoặc $m = 1$

+ Khi $m = -1$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Vậy hệ vô nghiệm

+ Khi $m = 1$, hệ phương trình trở thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 2$

$\Leftrightarrow y = 2 - x$

Vậy hệ có vô số nghiệm (x,y) với $\begin{cases} x \in R \\ y = 2 - x \end{cases}$

Như vậy: Với $m \neq \pm 1$ thì hệ có 1 nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{m+2}{m+1} \\ y = \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$

Với $m = -1$ thì hệ vô nghiệm

Với $m = 1$ thì hệ có vô số nghiệm (x,y) thoả $x + y = 2$

Bài 2: *Giải và biện luận hệ phương trình:* $\begin{cases} ax + by = a^2 + b^2 \\ bx + ay = 2ab \end{cases}$

Giải:

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$

$$D_x = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & b \\ 2ab & a \end{vmatrix} = a^3 - ab^2 = a(a^2-b^2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & a^2+b^2 \\ b & 2ab \end{vmatrix} = a^2b - b^3 = b(a^2-b^2)$$

Biện luận:

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \pm b$

Khi đó hệ có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{a(a^2-b^2)}{a^2-b^2} = a \\ y = \dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2-b^2} = b \end{cases}$

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm b$, khi đó $D_x = D_y = 0$

Vậy hệ có vô số nghiệm:

+ Nếu $a = b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x,y) với $x, y \in R$

+ Nếu $a = b \neq 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x,y) với $x + y = 2a$

+ Nếu $a = -b \neq 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x,y) với $x - y = 2a$

Bài 3: *Giải và biện luận* $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = a \\ (2a-b)x + (2a+b)y = b \end{cases}$

Giải:

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ 2a-b & 2a+b \end{vmatrix} = 6ab$

$$D_x = \begin{vmatrix} a & a-b \\ b & 2a+b \end{vmatrix} = 2a^2 + b^2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a+b & a \\ 2a-b & b \end{vmatrix} = b^2 + 2ab - 2a^2$$

Biện luận:

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow 6ab \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ và $b \neq 0$, khi đó hệ có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2a^2+b^2}{6ab} \\ y = \dfrac{b^2+2ab-2a^2}{6ab} \end{cases}$

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow 6ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$

+ Với $a = 0$ thì $D_x = D_y = b^2$

Khi $b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

Khi $b = 0$ thì hệ có vô số nghiệm (x,y) với $x, y \in R$

+ Với $b = 0$ thì $D_x = 2a^2$; $D_y = -2a^2$

Khi $a \neq 0$ thì hệ vô nghiệm

Khi a = 0 thì hệ có vô số nghiệm (x,y) với x, y $\in$ R

Vậy:

– Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì hệ phương trình có 1 nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{2a^2 + b^2}{6ab} \\ y = \dfrac{b^2 + 2ab - 2a^2}{6ab} \end{cases}$

– Nếu a = b = 0 thì hệ phương trình có vô số nghiệm (x,y) với x, y $\in$ R

– Nếu ($a = 0$ và $b \neq 0$) hoặc ($a \neq 0$ và $b = 0$) thì hệ phương trình vô nghiệm

2. Dạng 2: Tìm giá trị của tham số để hệ phương trình bậc nhất có nghiệm thoả mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp

– Biến đổi hệ về dạng $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ (chú ý xác định điều kiện của ẩn số nếu có)

– Sử dụng các trường hợp trong bảng giải và biện luận hệ bậc nhất hai ẩn để rút ra điều kiện của tham số

+ Hệ có nghiệm duy nhất khi $D \neq 0$

+ Hệ có vô số nghiệm khi $D = D_x = D_y = 0$

+ Hệ vô nghiệm khi $D = 0$ và $D_x \neq 0$ hoặc $D_y \neq 0$

Trường hợp có nghiệm cần chú ý đến điều kiện nghiệm (nếu có)

Bài 4: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = m \end{cases}$

a. *Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.*

b. *Tìm m nguyên để nghiệm duy nhất của hệ là nghiệm nguyên.*

Giải:

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$

$$D_x = \begin{vmatrix} m+2 & 4 \\ m & m \end{vmatrix} = m^2 - 2m$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2$$

a. Hệ phương trình có nghiệm khi:

$$\left[\begin{array}{l} D \neq 0 \\ \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 - 4 \neq 0 \\ \begin{cases} (m-2)(m+2) = 0 \\ m(m-2) = 0 \\ (m+1)(m-2) = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq \pm 2 \\ m = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \neq -2$$

b. Hệ có nghiệm duy nhất khi: $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$

Khi đó: $$x = \frac{D_x}{D} = \frac{m}{m+2} = 1 - \frac{2}{m+2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{m+1}{m+2} = 1 - \frac{1}{m+2}$$

Để x, y là số nguyên thì $\frac{1}{m+2}$ là số nguyên

Tức là m + 2 là ước số của 1 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+2=1 \\ m+2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

Vậy khi $m = -1$; $m = -3$ thì hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 5: *Xác định m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất*

a. $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx + y = 2m + 1 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} (m+1)\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = m - 1 \\ \frac{2m^2}{x} - \frac{1}{y} = m^2 + 2m \end{cases}$

Giải:

a. Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 1$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi $D = m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

b. Đặt $\frac{2}{x} = X \neq 0$; $\frac{1}{y} = Y \neq 0$, khi đó hệ trở thành

$$\begin{cases} (m+1)X - 2Y = m - 1 \\ m^2X - Y = m^2 + 2m \end{cases} \quad (*)$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m+1 & -2 \\ m^2 & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1 = (m-1)(2m+1)$

$$D_x = \begin{vmatrix} m-1 & -2 \\ m^2+2m & -1 \end{vmatrix} = 2m^2 - 3m + 1 = (m+1)(2m+1)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & m-1 \\ m^2 & m^2+2m \end{vmatrix} = 4m^2 + 2m = 2m(2m+1)$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất khi hệ (*) có nghiệm (X,Y) sao cho $X \neq 0$; $Y \neq 0$, tức là:

$$\begin{cases} D \neq 0 \\ D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \quad \text{và} \quad m \neq -\dfrac{1}{2} \\ m \neq -1 \quad \text{và} \quad m \neq -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \quad \text{và} \quad m \neq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy, để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì $m \neq 0$; $m \neq \pm 1$; $m \neq -\dfrac{1}{2}$.

Bài 6: *Xác định điều kiện để hệ phương trình sau có vô số nghiệm*

a. $\begin{cases} 2(m+1)x - (5m-2)y = 2(m-3) \\ (m+1)x - 3(m-1)y = m-3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} (a+1)x + (a+b)y = b-a \\ (5+a)x + 2(a+b)y = b-1 \end{cases}$

Giải:

a. Ta có: $D = \begin{vmatrix} 2(m+1) & -(5m-2) \\ m+1 & -3(m-1) \end{vmatrix} = (m+1)(4-m)$

$D_x = \begin{vmatrix} 2(m-3) & -(5m-2) \\ m-3 & -3(m-1) \end{vmatrix} = (m-3)(4-m)$

$D_y = \begin{vmatrix} 2(m+1) & 2(m-3) \\ m+1 & m-3 \end{vmatrix} = 0$

Hệ phương trình có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x = 0 \\ D_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(4-m) = 0 \\ (m-3)(4-m) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m = 4$

Vậy, với m = 4 thì hệ phương trình có vô số nghiệm

b. Ta có: $D = \begin{vmatrix} a+1 & a+b \\ 5+a & 2(a+b) \end{vmatrix} = (a+b)(a-3)$

Để hệ có vô số nghiệm thì $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ a = 3 \end{array}\right.$

– Với $a = -b$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} (1+a)x = -2a \\ (5+a)x = -a-1 \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm khi $\dfrac{1+a}{5+a} = \dfrac{-2a}{-a-1} \Leftrightarrow a = -4 \pm \sqrt{17}$

– Với $a = 3$ khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 4x + (3+b)y = b-3 \\ 8x + 2(3+b)y = b-1 \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm khi $\frac{b-3}{b-1}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow b = 5$

Vậy, với ($a = -4 + \sqrt{17}$ và $b = 4 - \sqrt{17}$) hoặc ($a = -4 - \sqrt{17}$ và $b = 4 + \sqrt{17}$) hoặc ($a = 3$ và $b = 5$) thì hệ có vô số nghiệm.

Nhận xét:

Để tìm giá trị của tham số để hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn có vô số nghiệm ta có thể giải hệ các điều kiện $D = D_x = D_y = 0$. Tuy nhiên, đối với một số bài việc giải hệ các điều kiện đó phức tạp như bài 6 câu b, thì ta có thể chỉ giải điều kiện $D = 0$ trước và thay các giá trị tìm được của tham số vào hệ phương trình đã cho và tiếp tục biện luận để tìm ra điều kiện hệ đó có vô số nghiệm

Bài 7: *Xác định điều kiện của tham số để hệ phương trình sau vô nghiệm*

a. $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ *b.* $\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a - b \end{cases}$

Giải:

a. Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & -1 \end{vmatrix} = -1 + m^2$

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = m^2 - 1 = 0$ do đó $m = \pm 1$

Khi $m = 1$, ta có hệ trở thành $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ vậy hệ vô nghiệm

Khi $m = -1$, ta có hệ trở thành $\begin{cases} x + y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$ vậy hệ có vô số nghiệm

Tóm lại, với $m = 1$ thì hệ vô nghiệm

b. Ta có: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 - b^2$

Hệ vô nghiệm $\Rightarrow D = a^2 - b^2 = 0$. Suy ra: $a = \pm b$

Với $a = \pm b = 0$ hệ trở thành $0x + 0y = 0$, vậy hệ có vô số nghiệm

Với $a = b \neq 0$ hệ trở thành $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ vậy hệ vô nghiệm

Với $a = -b \neq 0$ hệ trở thành $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = -2 \end{cases}$ vậy hệ vô nghiệm

Tóm lại, với $a = \pm b \neq 0$ thì hệ vô nghiệm.

Bài 8: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 2x + y = 3m + 3 \end{cases}$

a. *Tìm hệ thức liên hệ giữa nghiệm (x,y) của hệ không phụ thuộc vào m* *b. Với giá trị nào của m thì hệ có nghiệm (x,y) thoả $x^2 + y^2$ đạt giá trị bé nhất*

Giải:

a. Nếu (x,y) là nghiệm của hệ. Khi đó:

$$\begin{cases} x - 2y = 4 - m \\ 2x - y = 3m + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6y = 12 - 3m \\ 2x - y = 3m + 3 \end{cases}$$

Suy ra $5x - 7y = 15$ là hệ thức liên hệ giữa x, y không phụ thuộc vào m.

b. Từ hệ phương trình ta giải được $\begin{cases} x = m + 2 \\ y = m - 1 \end{cases}$

Khi đó: $x^2 + y^2 = 2m^2 + 2m + 5 = 2(m - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2}$

Vì $(m - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ suy ra $x^2 + y^2 \geq \frac{9}{2}$

vậy $x^2 + y^2$ đạt giá trị bé nhất khi $m = \frac{1}{2}$ và giá trị bé nhất đó là $\frac{9}{2}$.

Bài 9: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$

Tìm b để với mọi a, ta luôn tìm được c sao cho hệ có nghiệm.

Giải:

Ta có: $D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1$

Nếu $D \neq 0$ tức là $a \neq \pm1$ thì hệ có nghiệm duy nhất với mọi c nên không cần đặt điều kiện cho b

Nếu $D = 0$ tức là $a = \pm1$

– Với a = 1 hệ trở thành $\begin{cases} x + y = b \\ x + y = c^2 + c \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow b = c^2 + c \Leftrightarrow c^2 + c - b = 0$ (1)

Do đó, tồn tại c ⇔ phương trình (1) có nghiệm c

$$\Leftrightarrow \Delta_c = 1 + 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}$$

– Với a = –1 hệ trở thành $\begin{cases} -x + y = b \\ x - y = c^2 + c \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -b = c^2 + c \Leftrightarrow c^2 + c + b = 0$ (2)

Do đó, tồn tại c ⇔ phương trình (2) có nghiệm c

$$\Leftrightarrow \Delta_c = 1 - 4b \geq 0 \Leftrightarrow b \leq \frac{1}{4}$$

Tóm lại, với $-\frac{1}{4} \le b \le \frac{1}{4}$ thì mọi a luôn tồn tại c để hệ có nghiệm.

Chú ý 1: *Việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể áp dụng để tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức*

$$A = |ax + by + c| + |a'x + b'y + c'|$$
$$B = (ax + by + c)^2 + (a'x + b'y + c')^2$$

Chẳng hạn:

Bài 10: *Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức*

$$A = |2x + y - 3| + |x + ay + 1|$$

Giải:

Xét hệ $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + ay + 1 = 0 \end{cases}$ (*)

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 1$

$D = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

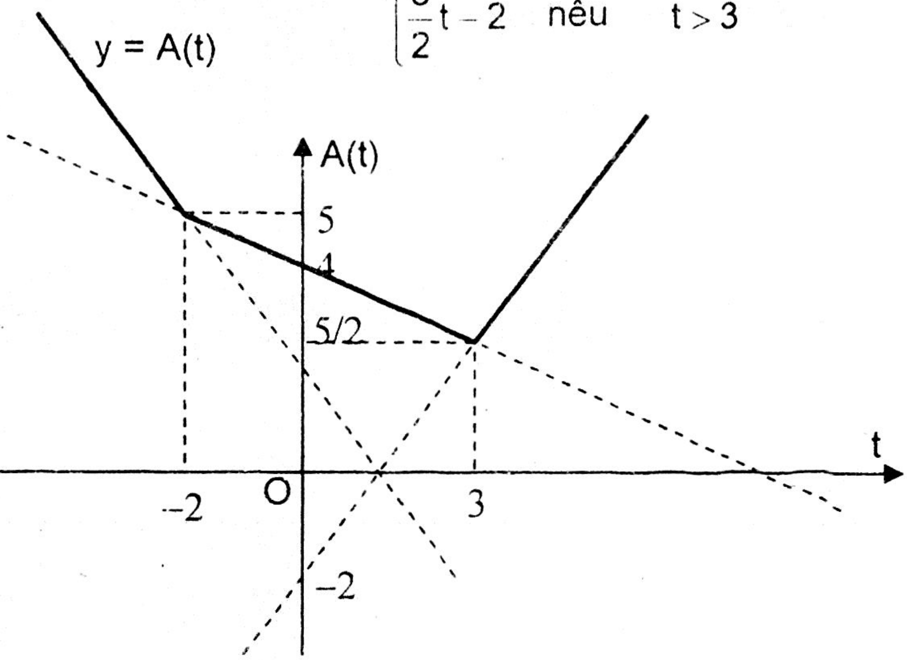
– Nếu $a \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow D \neq 0$, hệ (*) có nghiệm duy nhất, do đó minA = 0.

– Nếu $a = \frac{1}{2}$, khi đó $A = |2x + y - 3| + \frac{1}{2}|2x + y + 2|$

Đặt $t = 2x + y$

Suy ra: $A = |t - 3| + \frac{1}{2}|t + 2| = \begin{cases} 2 - \frac{3}{2}t & \text{nếu} \quad t \le -2 \\ 4 - \frac{1}{2}t & \text{nếu} \quad -2 < t \le 3 \\ \frac{3}{2}t - 2 & \text{nếu} \quad t > 3 \end{cases}$

Vẽ đồ thị:



Từ đồ thị hàm số suy ra $\min A = \frac{5}{2}$ nếu $a = \frac{1}{2}$.

Chú ý 2: Việc giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có thể ứng dụng xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng trong mặt phẳng.

Cho hai đường thẳng: $ax + by + c = 0$ (d_1) và $a'x + b'y + c' = 0$ (d_2)

Tuỳ theo các giá trị của tham số để xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng

- Trước hết, thiết lập hệ phương trình tạo bởi (d_1) và (d_2)

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \quad (*)$$

- Biện luận theo hệ phương trình (*) ta có được vị trí tương đối của (d_1) và (d_2)

+ Nếu (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow d_1 \,//\, d_2$

+ Nếu (*) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow d_1 \equiv d_2$

+ Nếu (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow d_1$ và d_2 cắt nhau

Chẳng hạn:

Bài 11: *Cho $a^2 + b^2 > 0$ và hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình:*

(d_1): $(a - b)x + y = 1$

(d_2): $(a^2 - b^2)x + ay = b$

a. Xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

b. Tìm a, b để giao điểm đó thuộc trục hoành.

Giải:

Ta có: $(a - b)x + y = 1$ luôn là phương trình đường thẳng

Còn $(a^2 - b^2)x + ay = b$ là phương trình đường thẳng khi:

$$\left[\begin{array}{l} a^2 - b^2 \neq 0 \\ a \neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \neq \pm b \\ a \neq 0 \end{array}\right.$$

Như vậy, nếu $a = b = 0$ thì phương trình này không là phương trình đường thẳng.

Do đó, với $a^2 + b^2 > 0$ thì hai phương trình đã cho là phương trình của hai đường thẳng:

a. Giao điểm của (d_1) và (d_2) là nghiệm của hệ $\begin{cases} (a - b)x + y = 1 \\ (a^2 - b^2)x + ay = b \end{cases}$

Ta có $D = b(b - a)$

Vậy để (d_1) cắt (d_2) thì $D \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 0$ và $b \neq a$

Khi đó giao điểm của (d_1) và (d_2) là điểm A có toạ độ $\begin{cases} x = -\dfrac{1}{b} \\ y = \dfrac{a}{b} \end{cases}$

b. Để A thuộc trục Ox thì $\begin{cases} D \neq 0 \\ \frac{a}{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \neq 0 \text{ và } b \neq a \\ a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

Chú ý 3: *Nếu bài toán cho hệ 3 phương trình với hai ẩn số thì xét hệ gồm các phương trình và yêu cầu nghiệm thoả mãn phương trình còn lại*

Bài 12: *Tìm m để hệ* $\begin{cases} mx + y = 1 & (1) \\ x + my = 1 & (2) \\ x + y = m & (3) \end{cases}$ *có nghiệm*

Giải:

Xét hệ phương trình gồm (2) và (3): $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$ giải

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - m$

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 1 \end{vmatrix} = 1 - m^2$

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m - 1$

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ khi đó hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 + m \\ y = -1 \end{cases}$

Nghiệm này thoả mãn phương trình (1)

$\Leftrightarrow m(1 + m) - 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$

Do $m \neq 1$ nên $m = -2$

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 1$ khi đó hệ đã cho trở thành $x + y = 1$, vậy hệ có vô số nghiệm

Như vậy, với $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -2 \end{array}\right.$ thì hệ có nghiệm.

Chú ý 4: *Đối với hệ phương trình bậc nhất ba ẩn số ta có thể dùng phương pháp cộng đại số để khử dần các ẩn số và đưa hệ đã cho về hệ phương trình tam giác (phương pháp Crame)*

Bài 13: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ -2x + 5y + z = 5 \\ 3x - 7y + 4z = 8 \end{cases}$

Giải:

Ta có hệ đã cho trở thành $\begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ 5x - 13y = -12 \\ x - y = 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3y + 2z = -2 \\ x - y = 12 \\ 8x = 168 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 21 \\ y = 9 \\ z = 2 \end{cases}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a. $\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} mx + (m-2)y = 2 \\ 2mx + 3(m-1)y = 3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (m-1)x - y = 2m - 2 \\ x + (m-1)y = m \end{cases}$

Bài 2. Giải và biện luận các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} ax - by = a^2 - b \\ bx - b^2y = 4b \end{cases}$ b. $\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = a \\ (2a+b)y + (2a-b)x = b \end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

a. Giải và biện luận hệ phương trình theo m.

b. Khi hệ có nghiệm duy nhất (x_o, y_o), tìm hệ thức liên hệ giữa x_o, y_o độc lập với m.

c. Khi hệ có nghiệm duy nhất (x_o, y_o), tìm giá trị nguyên của m sao cho x_o, y_o là những số nguyên.

Bài 4. Tìm điều kiện để hệ phương trình sau có vô số nghiệm:

a. $\begin{cases} mx + y = 3 \\ 4x + my = 6 \end{cases}$ b. $\begin{cases} mx + (m-1)y = m \\ 3x + (5-m)y = 2m - 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} (1+a)x + (a+b)y = b - a \\ (5+a)x + 2(a+b)y = b - 1 \end{cases}$

Bài 5. Tìm điều kiện để hệ phương trình sau vô nghiệm:

a. $\begin{cases} -4x + my = m + 1 \\ (m+6)x + 2y = 3 + m \end{cases}$ b. $\begin{cases} ax + by = a + b \\ bx + ay = a - b \end{cases}$

Bài 6. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm (x,y) với x, y nguyên

a. $\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$ b. $\begin{cases} mx + y = 3m \\ x + my = 2m + 1 \end{cases}$

Bài 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m-1)x-my=3m-1\\2x-y=m+5\end{cases}$

Định m để hệ có nghiệm duy nhất (x,y) mà x^2+y^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(m+1)x+my=2m-1\\mx-y=m^2-2\end{cases}$

Tìm m để hệ có nghiệm (x,y) mà xy đạt giá trị lớn nhất.

Bài 9. Tìm a để với mọi b luôn tồn tại c để hệ có nghiệm

$\begin{cases}bx-y=ac^2\\(b-6)x+by=c+1\end{cases}$ với m = 1; m = 2

Bài 10. Tìm a, b để hệ có nghiệm với mọi m

$\begin{cases}(m+3)x+4y=5a+3b+m\\x+my=a-2b+2m-1\end{cases}$

Bài 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=|3x-ay+2|+|3x+y+a|$

Bài 12. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $B=(x-2y+1)^2+(2x+ay+5)^2$

Bài 13. Cho hệ $\begin{cases}ax+by=c\\bx+cy=a\\cx+ay=b\end{cases}$ có nghiệm, chứng minh rằng $a^3+b^3+c^3=3abc$

Bài 14. Giải và biện luận theo m: $\begin{cases}2x+(3m+1)y=6\\mx+2y=2m+1\\(4-m)x+6y=m+8\end{cases}$

Bài 15. Xác định a để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases}3x-y=1\\-2x+ay=a-1\\x-2y=3\end{cases}$

Bài 16. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}x-y+z=7\\x+y-z=1\\-x+y+z=3\end{cases}$

b. $\begin{cases}x+2y+3z=8\\3x+y+z=6\\2x+y+2z=6\end{cases}$

Bài 17. Cho hai đường thẳng (d_1), (d_2) có phương trình:

(d_1): $kx-y+k=0$

(d_2): $(1-k^2)x+2ky-(1+k^2)=0$

a. Chứng minh rằng khi k thay đổi, (d_1) luôn đi qua một điểm cố định.

b. Với mỗi giá trị của k, hãy xác định giao điểm của (d_1) và (d_2).

§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa.

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng:

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

Trong đó x là ẩn số; a, b, c là các hệ số đã cho

2. Cách giải và công thức nghiệm.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0) \ (1)$$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$: *(1) có 2 nghiệm* $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}\right.$

$\Delta = 0$: *(1) có nghiệm kép* $x = -\dfrac{b}{2a}$

$\Delta < 0$: *(1) vô nghiệm*

* *Chú ý: Trong trường hợp nếu* $b = 2b'$ *thì* $\Delta' = b'^2 - ac$ *và kết quả trên được viết lại*

$\Delta' > 0$: *(1) có 2 nghiệm* $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \\ x_2 = \dfrac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \end{array}\right.$

$\Delta = 0$: *(1) có nghiệm kép* $x = -\dfrac{b'}{a}$

$\Delta < 0$: *(1) vô nghiệm*

3. Định lý Viete.

a. Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ *có 2 nghiệm*

x_1, x_2 *thì* $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

b. Ứng dụng.

– Nếu phương trình (1) có a + b + c = 0 thì (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{c}{a} \end{array}\right.$

– *Nếu phương trình (1) có* $a - b + c = 1$ *thì (1) có nghiệm* $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{c}{a} \end{array}\right.$

– *Nếu hai số x, y thoả* $\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases}$ *thì x, y là nghiệm của phương trình* $X^2 - SX + P = 0$ *(điều kiện* $S^2 \geq 4P$*)*

4. Dấu các nghiệm của phương trình.

– *Phương trình có 2 nghiệm trái dấu* $\Leftrightarrow P < 0$

– *Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

– *Phương trình có 2 nghiệm dương* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

– *Phương trình có 2 nghiệm âm* $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Dạng 1: Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Phương pháp:

Giải và biện luận phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

1/ Trường hợp 1: Với $a = 0$, phương trình trở thành $bx + c = 0$ (đã xét ở phần trước)

2/ Trường hợp 2: với $a \neq 0$

– Tính Δ hoặc Δ'

– Biện luận:

Nếu $\Delta > 0$ (hoặc $\Delta' > 0$), phương trình (1) có 2 nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \left(x_{1,2} = \frac{-b' \pm \sqrt{\Delta'}}{a}\right)$$

Nếu $\Delta = 0$ (hoặc $\Delta' = 0$), phương trình (1) có nghiệm kép $x = -\dfrac{b}{2a}$ $\left(x = -\dfrac{b'}{a}\right)$

Nếu $\Delta < 0$ (hoặc $\Delta' < 0$), phương trình (1) vô nghiệm

– Kết luận

Bài 1: *Giải và biện luận*

a. $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$

b. $x^2 + (m - 1)x - 2m^2 + m = 0$

Giải:

a. Ta có: $\Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 1 = 2m - 1$

– Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 2m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$, khi đó phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = m + \sqrt{2m-1} \\ x_2 = m - \sqrt{2m-1} \end{array}\right.$

– Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$, khi đó phương trình có nghiệm kép $x = m$ hay $x = \frac{1}{2}$

– Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow 2m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{2}$, khi đó phương trình vô nghiệm

Kết luận: Với $m > \frac{1}{2}$, phương trình có 2 nghiệm $x_{1,2} = m \pm \sqrt{2m-1}$

Với $m = \frac{1}{2}$, phương trình có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$

Với $m < \frac{1}{2}$, phương trình vô nghiệm.

b. Ta có: $\Delta = (m - 1)^2 + 4(2m^2 - m) = 9m^2 - 6m + 1 = (3m - 1)^2 \geq 0$

– Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 1 - 2m \end{array}\right.$

– Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{3}$, phương trình có nghiệm kép $x = \frac{1-m}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

Kết luận: Với $m \neq \frac{1}{3}$, phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = m \\ x = 1 - 2m \end{array}\right.$

Với $m = \frac{1}{3}$, phương trình có nghiệm kép $x = \frac{1}{3}$.

Bài 2: *Giải và biện luận phương trình:*

a. $(m + 1)x^2 - (2m + 1)x + m - 2 = 0$

b. $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$

Giải

a. – Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, khi đó phương trình có nghiệm $x = 3$

– Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Ta có: $\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m + 1)(m - 2) = 8m + 9$

+ Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow 8m + 9 > 0 \Leftrightarrow -1 \neq m > -\frac{9}{8}$, khi đó phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2m+1+\sqrt{8m+9}}{2(m+1)} \\ x_2 = \dfrac{2m+1-\sqrt{8m+9}}{2(m+1)} \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow 8m + 9 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{8}$, khi đó phương trình có nghiệm kép $x = \frac{2m+1}{2m+2} \Leftrightarrow x = 5$

+ Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 8m + 9 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{9}{8}$, khi đó phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

Với $m = -1$, phương trình có nghiệm $x = 3$

Với $-\frac{9}{8} < m \neq -1$, phương trình có 2 nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{2m+1 \pm \sqrt{8m+9}}{2(m+1)}$$

Với $m = -\frac{9}{8}$, phương trình có nghiệm kép $x = 5$

Với $m < -\frac{9}{8}$, phương trình vô nghiệm.

b. – Nếu $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$, khi đó phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{4}$.

– Nếu $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Ta có: $\Delta' = (m + 1)^2 - (m - 1)(m + 2) = m + 3$

+ Nếu $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 3 > 0 \Leftrightarrow 1 \neq m > -3$, khi đó phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{m+1+\sqrt{m+3}}{m-1} \\ x_2 = \dfrac{m+1-\sqrt{m+3}}{m-1} \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$, khi đó phương trình có nghiệm kép $x = \frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

+ Nếu $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -3$, khi đó phương trình vô nghiệm.

Kết luận:

Với m = 1, phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{4}$

Với $-3 < m \neq 1$, phương trình có 2 nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m+3}}{m-1}$$

Với m = –3, phương trình có nghiệm kép $x = \frac{1}{2}$

Với m < –3, phương trình vô nghiệm

2. Dạng 2: Các bài toán ứng dụng định lý Viete

Phương pháp:

1/ Bài toán 1: Tính giá trị của các biểu thức đối xứng với các nghiệm

– Biểu thị các biểu thức đối xứng đối với các nghiệm theo S và P

– Thay giá trị của $S = \frac{-b}{a}$ và $P = \frac{c}{a}$ vào biểu thức ta có kết quả

2/ Bài toán 2: Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x_1 và x_2 của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ không phụ thuộc vào tham số

– Tìm điều kiện của tham số để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 ($a \neq 0$; $\Delta \geq 0$)

– Áp dụng định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = f(m) \\ x_1.x_2 = g(m) \end{cases}$

– Khử m từ hệ trên ta được hệ thức cần tìm

3/ Bài toán 3: Tìm phương trình bậc hai có nghiệm x, y

– Tính $\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases}$

– Áp dụng kết quả, nếu x, y thoả mãn các hệ thức trên thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2 - SX + P = 0$

4/ Bài toán 4: Xét dấu nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$

Áp dụng kết quả bảng dấu các nghiệm của phương trình

– Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$ hay $ac < 0$

– Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \end{cases}$

– Phương trình có 2 nghiệm $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$

– Phương trình có 2 nghiệm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

Bài 3: *Cho phương trình* $x^2 - 2mx + 2m - 5 = 0$

1. *Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt* x_1, x_2
2. *Tính theo m giá trị của các biểu thức sau:*

a. $A = x_1^2 + x_2^2$ b. $B = x_1^3 + x_2^3$

c. $C = x_1^4 + x_2^4$ d. $D = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1}$

e. $E = (3x_1 - x_2)(3x_2 - x_1)$

Giải

1. Ta có: $\Delta = m^2 - 2m + 5 = (m-1)^2 + 4 > 0\ \forall m$

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2

2. Ta có: $x_1 + x_2 = 2m$; $x_1.x_2 = 2m - 5$

Khi đó:

a. $A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 4m^2 - 4m + 10$

b. $B = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1.x_2(x_1 + x_2) = 8m^3 - 12m^2 + 30m$

c. $C = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2.x_2^2 = (4m^2 - 4m + 10)^2 - 2(2m-5)^2$

$= 16m^4 - 32m^3 + 88m^2 - 4m + 50$

d. $D = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1.x_2} = \dfrac{4m^2 - 4m + 10}{2m - 5}$

e. $E = 9x_1.x_2 - 3(x_1^2 + x_2^2) + x_1.x_2 = 10x_1.x_2 - 3(x_1^2 + x_2^2)$

$= 10(2m - 5) - 3(4m^2 - 4m + 10) = -12m^2 + 32m - 80$

Bài 4: *Xác định a để phương trình* $x^2 + ax + 1 = 0$ *có hai nghiệm* x_1, x_2 *thoả mãn:* $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 > 7$

Giải:

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = a^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow |a| \ge 2$

Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$

Ta có: $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 > 7 \Leftrightarrow \dfrac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2.x_2^2} > 7$

$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2.x_2^2 > 7x_1^2.x_2^2$

$\Leftrightarrow [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2]^2 > 9x_1^2.x_2^2$

$\Leftrightarrow (a^2 - 2)^2 > 9 \Leftrightarrow |a^2 - 2| > 3$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2 > 3 \\ a^2 - 2 < -3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 > 5 \\ a^2 < -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow a^2 > 5$

$\Leftrightarrow |a| > \sqrt{5}$ (thoả mãn điều kiện $|a| \ge 2$)

Bài 5: *Cho phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $4(x_1 + x_2) = 7x_1.x_2$.*

Giải:

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 3 - m \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad -1 \neq m \leq 3 \qquad (*)$

Khi đó: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1.x_2 = \dfrac{m-2}{m+1} \end{cases}$

Suy ra: $4(x_1 + x_2) = 7x_1.x_2 \Leftrightarrow 4.\dfrac{2(m-1)}{m+1} = 7.\dfrac{m-2}{m+1} \Leftrightarrow m = -6$ (thoả mãn điều kiện (*)).

Bài 6: *Cho phương trình $x^2 - 2(m + 4)x + m^2 - 8 = 0$. Xác định m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 và:*

a. $A = x_1 + x_2 - 3x_1.x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

b. $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2$ đạt giá trị bé nhất.

Giải:

Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta' = (m + 4)^2 - (m^2 - 8) \geq 0$

$\Leftrightarrow 8m + 24 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -3$

Với $m \geq -3$, phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 và $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+4) \\ x_1.x_2 = m^2 - 8 \end{cases}$

a. $A = 2(m + 4) - 3(m^2 - 8) = -3m^2 + 2m + 32$

$= -3(m - \frac{1}{3})^2 + \frac{97}{3} \leq \frac{97}{3}$

Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{1}{3}$ (thoả mãn $m > -3$)

Vậy, giá trị cần tìm của m là $m = \frac{1}{3}$ để $A = x_1 + x_2 - 3x_1.x_2$ đạt giá trị lớn nhất

b. $B = (x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2 = 4(m + 4)^2 - 3(m^2 - 8)$

$= m^2 + 32m + 88 = (m + 16)^2 - 168 \geq -168$

Dấu "=" xảy ra khi $m = -16$ (không thoả mãn $m > -3$)

Vậy, không có giá trị nào của m để $B = x_1^2 + x_2^2 - x_1.x_2$ đạt giá trị bé nhất.

Bài 7: *Cho phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + 2m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2. Khi đó hãy lập phương trình có nghiệm sau:*

a. $-2x_1 ; -2x_2$ *b.* $\dfrac{1}{x_1^2} ; \dfrac{1}{x_2^2}$ *c.* $x_1 + \dfrac{1}{x_2} ; x_2 + \dfrac{1}{x_1}$

Giải:

Phương trình có nghiệm x_1, x_2 $\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - (2m+3) \geq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{2}$

Khi đó $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+1) \\ x_1.x_2 = 2m+3 \end{cases}$

a. Ta có: $\begin{cases} -2x_1 + (-2x_2) = -2(x_1 + x_2) = 4(m+1) \\ (-2x_1)(-2x_2) = 4x_1.x_2 = 4(2m+3) \end{cases}$

Vậy $-2x_1$, $-2x_2$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - 4(m+1)X + 4(2m+3) = 0$$

b. Ta có: $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2.x_2^2} = \dfrac{(x_1+x_2)^2 - 2x_1.x_2}{x_1^2.x_2^2}$

$$= \frac{4(m+1)^2 - 2(2m+3)}{(2m+3)^2} = \frac{4m^2 + 4m - 2}{(2m+3)^2}$$

$$\frac{1}{x_1^2}.\frac{1}{x_2^2} = \frac{1}{x_1^2.x_2^2} = \frac{1}{(2m+3)^2}$$

Vậy: $\dfrac{1}{x_1^2}; \dfrac{1}{x_2^2}$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 - \frac{4m^2 + 4m - 2}{(2m+3)^2}X + \frac{1}{(2m+3)^2} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $(2m+3)^2X^2 - (4m^2 + 4m - 2)X + 1 = 0$

c. Ta có: $x_1 + \dfrac{1}{x_2} + x_2 + \dfrac{1}{x_1} = x_1 + x_2 + \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$

$$= \frac{(x_1 + x_2)(x_1.x_2 + 1)}{x_1.x_2} = \frac{-4(m^2 + 3m + 2)}{2m+3}$$

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1.x_2 + \frac{1}{x_1.x_2} + 2$$

$$= \frac{x_1^2.x_2^2 + 2x_1.x_2 + 1}{x_1.x_2} = \frac{4m^2 + 16m + 16}{2m+3}$$

Vậy, $x_1 + \dfrac{1}{x_2}$; $x_2 + \dfrac{1}{x_1}$ là nghiệm của phương trình:

$$X^2 + \frac{4(m^2 + 3m + 2)}{2m+3}X + \frac{4m^2 + 16m + 16}{2m+3} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $(2m+3)X^2 + 4(m^2 + 3m + 2)X + 4m^2 + 16m + 16 = 0$

Bài 8: *Cho phương trình* $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$

a. *Xác định m để phương trình có 1 nghiệm.*

b. *Nếu phương trình có nghiệm x_1, x_2. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.*

Giải:

a. Nếu $m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$, khi đó phương trình có 1 nghiệm $x = -\frac{2}{3}$

Nếu $m + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$, khi đó phương trình có 1 nghiệm khi và chỉ khi: $\Delta' = (m-1)^2 - 4(m+2) = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 7 \end{array}\right.$$

Vậy, với $m = -2$ hoặc $m = -1$ hoặc $m = 7$ thì phương trình có đúng 1 nghiệm.

b. Khi $\Delta' \geq 0$ tức là $m^2 - 6m - 7 \geq 0$ thì phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 và $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{2(m-1)}{m+2} = 2 - \dfrac{6}{m+2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{4}{m+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - \dfrac{6}{m+2} \\ \dfrac{3}{2}x_1.x_2 = \dfrac{6}{m+2} \end{cases}$

Suy ra, $x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_1.x_2 = 2 \Leftrightarrow 2x_1 + 2x_2 + 3x_1.x_2 - 4 = 0$ là hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

Bài 9: *Cho phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$. Xác định m để phương trình có:*

a. *Hai nghiệm trái dấu*

b. *Hai nghiệm dương phân biệt*

c. *Ít nhất nghiệm âm.*

Giải:

a. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ P < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \dfrac{m-3}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 3$$

b. Phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt tức là $0 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 1 > 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m > -1 \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 3 \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1 < m < 0$ hoặc $m > 3$

c. – Nếu m = 0 thì phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{3}{2} > 0$, vậy m = 0 không thoả mãn điều kiện.

– Nếu $m \neq 0$, khi đó phương trình có ít nhất 1 nghiệm âm xảy ra trong trường hợp:

+ Có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 0 < m < 3$ (1)

+ Có 2 nghiệm $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \geq -1 \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 3 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$ vô nghiệm

Vậy để phương trình có ít nhất 1 nghiệm âm thì 0 < m < 3.

Bài 10: *Tuỳ theo m hãy xét dấu các nghiệm của phương trình:*

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m - 5 = 0$$

Giải:

Ta có: $\Delta' = 9m - 9$; $P = \frac{m-5}{m-2}$; $S = \frac{2(m+1)}{m-2}$

Ta tiến hành xét dấu Δ', P, S bằng bảng sau và rút ra kết luận

m	Δ'	P	S	Kết luận dấu của các nghiệm
$-\infty$				
	−	+	+	
−1			0	Phương trình vô nghiệm
	−	+	−	
1	0			Phương trình có nghiệm kép $x_1 = x_2 = -2 < 0$
	+	+	−	Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < x_2 < 0$
2		$\|$	$\|$	Phương trình có 1 nghiệm $x = -\frac{1}{2} < 0$
	+	−	+	Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < 0 < x_2$
5		0		Phương trình có 2 nghiệm $0 = x_1 < x_2$
$+\infty$	+	+	+	Phương trình có 2 nghiệm $0 < x_1 < x_2$

Bài 11: *Với giá trị nào của m thì 2 phương trình sau có nghiệm chung:*

$2x^2 + mx - 1 = 0$

$mx^2 - x + 2 = 0$

Giải:

Hai phương trình có nghiệm chung $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ (m^2 + 2)x - m - 4 = 0 \end{cases}$ có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ x = \dfrac{m+4}{m^2+2} \end{cases}$ có nghiệm

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{m+4}{m^2+2}\right)^2 + m\left(\dfrac{m+4}{m+2}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m^3 + 6m + 7 = 0 \Leftrightarrow m = -1$

Vậy, với $m = -1$ hai phương trình đã cho có nghiệm chung là $x = 1$

Nhận xét:

Chúng ta có thể ứng dụng việc giải và biện luận hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn để giải quyết dạng toán này bằng cách:

– Xét hệ tạo bởi 2 phương trình bậc hai $\begin{cases} ax^2 + bx + c = 0 \\ a'x^2 + b'x + c' = 0 \end{cases}$ *(1)*

– Đặt $x^2 = y$*, ta được hệ* $\begin{cases} bx + ay = -c \\ b'x + a'y = -c' \end{cases}$ *(2)*

– Để 2 phương trình có nghiệm chung trước hết hệ (2) có nghiệm thoả mãn $x^2 = y$*, tức là:* $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} D \neq 0 \\ \left(\dfrac{Dx}{D}\right)^2 = \dfrac{Dy}{D} \end{cases} \\ D = Dx = Dy = 0 \end{array}\right.$

Chẳng hạn ở bài 11:

Hai phương trình có nghiệm chung $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + mx - 1 = 0 \\ mx^2 - x + 2 = 0 \end{cases}$ có nghiệm

Đặt $x^2 = y$, ta được hệ $\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ x - my = 2 \end{cases}$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & -m \end{vmatrix} = -m^2 - 2$

$Dx = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -m \end{vmatrix} = -m - 4$

$Dy = \begin{vmatrix} m & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m - 1$

Vì $D \neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{m+4}{m^2+2}$; $y = \dfrac{1-2m}{m^2+2}$

Để $x^2 = y$ thì ta phải có:

$$\left(\frac{m+4}{m^2+2}\right)^2 = \frac{1-2m}{m^2+2} \Leftrightarrow m^3+6m+7=0 \Leftrightarrow m=-1$$

Vậy, với $m = -1$, hệ phương trình đã cho có nghiệm chung

C. BÀI TẬP

Bài 1: Giải và biện luận các phương trình:

a. $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 1 = 0$

b. $x^2 - 2mx + 2m^2 = 0$

c. $(m-2)x^2 - 2mx + m + 1 = 0$

d. $ax^2 - 2ax + a - b = 0$

Bài 2: Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$

a. Xác định m để phương trình có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1^2 + x_2^2 = 10$; $|x_1 - x_2| \le 2$.

c. Với giá trị nào của m thì phương trình có 2 nghiệm không âm. Khi đó tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ theo m.

d. Lập phương trình bậc hai ẩn y có hai nghiệm y_1, y_2 thoả mãn:

$$y_1 + y_2 = x_1 + x_2 \text{ và } \frac{y_1}{1-y_2} + \frac{y_2}{1-y_1} = 3$$

Bài 3: Cho phương trình: $x^2 - 2(2m+1)x + 3 + 4m = 0$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1, x_2 không phụ thuộc vào m.

c. Tính $A = x_1^3 + x_2^3$ theo m.

d. Tìm m để phương trình có 1 nghiệm gấp 3 lần nghiệm kia.

e. Viết phương trình bậc hai có nghiệm là x_1^2 và x_2^2.

Bài 4: Cho $f(x) = 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3$

a. Tìm m để phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2.

2. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = |x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2|$.

Bài 5: Tìm m để phương trình $x^2 - mx + m^2 - 3 = 0$ có nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền có độ dài bằng 2.

Bài 6: Cho phương trình $x^2 - 2(m+7)x + m^2 - 4 = 0$. Xác định m để:

a. Phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

b. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu.

c. Phương trình có 2 nghiệm cùng dấu dương.

Bài 7: Cho phương trình $x^2 - 2x.\sin\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$

a. Chứng minh rằng với mọi α phương trình luôn có nghiệm.

b. Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm mà không phụ thuộc vào α.

Bài 8: Cho phương trình: $mx^2 - 2(m - 3)x + m - 4 = 0$. Tìm m để:

a. Phương trình có đúng 1 nghiệm dương.

b. Phương trình có 2 nghiệm đều âm.

c. Phương trình có ít nhất 1 nghiệm dương.

Bài 9: Cho phương trình $x^2 - mx + m - 1 = 0$

a. Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn luôn có nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm trái dấu.

c. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm dương.

d. Cho $A = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1x_2$

– Tìm m để $A = 8$

– Tìm m để A đạt giá trị nhỏ nhất

Bài 10: Cho phương trình $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2 = 0$

a. Xác định m để phương trình có đúng 1 nghiệm.

b. Tìm m để phương trình có 1 nghiệm $x = 2$ và tìm nghiệm kia.

c. Xác định m để tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

d. Viết phương trình bậc hai có 2 nghiệm x_1^2 và x_2^2.

Bài 11: Cho 2 phương trình: $x^2 - 5x + k = 0$ (1) và $x^2 - 7x + 2k = 0$ (2)

a. Với giá trị nào của k thì phương trình (1) có 2 nghiệm mà nghiệm này gấp đôi nghiệm kia.

b. Tìm k để phương trình (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 = 25$

c. Với giá trị nào của k thì 2 phương trình cùng có nghiệm và một trong các nghiệm của phương trình (2) gấp đôi một trong các nghiệm của phương trình (1).

Bài 12: Cho phương trình $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ và $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ với các hệ số thoả mãn $a_1a_2 \geq 2(b_1 + b_2)$. Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai phương trình trên có nghiệm

Bài 13: Với a, b, c là 3 cạnh của tam giác. Chứng minh rằng phương trình sau đây vô nghiệm: $c^2x^2 + (a^2 - b^2 - c^2)x + b^2 = 0$.

Bài 14: Giả sử a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + px + 1 = 0$ và c, d là nghiệm của phương trình $y^2 + qy + 1 = 0$.

Chứng minh rằng: $(a - c)(a + d)(b - c)(b + d) = q^2 - p^2$.

Bài 15: Cho phương trình $(m - 1)x^2 + (2m - 1)x + m + 5 = 0$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm.

b. Tìm a sao cho tích $(x_1 - a)(x_2 - a)$ độc lập với m.

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Hệ gồm một phương trình bậc nhất và một phương trình bậc hai.

Cách giải: Sử dụng phương pháp thế

– Rút một ẩn từ phương trình bậc nhất.

– Thay vào phương trình bậc hai và tìm ẩn số còn lại rồi suy ra nghiệm của hệ phương trình.

II. Hệ đối xứng loại I đối với x, y.

1. Dạng hệ: *Là hệ phương trình mà khi ta thay đổi x bởi y và y bởi x thì hệ phương trình không thay đổi.*

2. Cách giải: *– Đặt $x + y = S$; $x.y = P$*

– Biến đổi hệ phương trình thành hệ phương trình theo ẩn S và P.

– Giải tìm S, P và với mỗi nghiệm (S,P) ta giải phương trình $X^2 - SX + P = 0$ để tìm nghiệm x, y tương ứng.

Chú ý: Điều kiện có x, y là $S^2 \geq 4P$

III. Hệ phương trình đối xứng loại II.

1. Dạng hệ: *Là hệ phương trình mà khi ta thay đổi x bởi y, y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia của hệ.*

2. Cách giải: *– Trừ từng vế hai phương trình của hệ cho nhau và đưa về phương trình tích* $(x - y)f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ f(x,y) = 0 \end{array}\right.$.

– Kết hợp với các phương trình của hệ giải cho từng trường hợp.

IV. Hệ phương trình đẳng cấp vế trái đối với x, y.

1. Dạng hệ: $\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}$

2. Cách giải:

Cách 1: – Kiểm tra $x = 0$; $y = 0$ có là nghiệm của hệ phương trình không.

– Nếu $x = 0$, $y = 0$ không phải là nghiệm của hệ phương trình thì ta đặt $x = ty$ và đưa được về 1 phương trình bậc hai theo t. Giải tìm t suy ra x, y.

Cách 2: – Khử số hạng tự do để đưa về phương trình dạng

$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$

– Đặt $x = ty$, khi đó phương trình trở thành:

$y^2(at^2 + bt + c) = 0$

+ Xét $y = 0$ thay vào hệ tìm x

+ Xét $at^2 + bt + c = 0$ nếu có nghiệm $t = t_o$ thì thay $x = t_o y$ vào hệ để tìm ẩn y và suy ra x.

Cách 3: – Từ hệ khử số hạng x^2 (hoặc y^2) để đưa về một phương trình khuyết x^2 (hoặc y^2).

– Rút 1 ẩn x (hoặc y) thì phương trình khuyết x^2 (hoặc y^2) đó thay vào một phương trình của hệ ta được phương trình trùng phương theo x (hoặc y). Giải tìm x (hoặc y) và suy ra nghiệm còn lại.

Lưu ý: Cách giải thứ 3 sử dụng thuận lợi đối với các bài toán biện luận.

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 1: *Giải phương trình* $\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (1) \\ 3x^2 - y^2 - 2y = 4 & (2) \end{cases}$

Giải:

Từ (1) $\Rightarrow x = \dfrac{5 + 3y}{2}$ thay vào phương trình (2) ta được:

$$23y^2 + 82y + 59 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = -\dfrac{59}{23} \end{array}\right.$$

Với $y = -1 \Rightarrow x = 1$

Với $y = -\dfrac{59}{23} \Rightarrow x = -\dfrac{86}{23}$

Vậy, hệ phương trình có 2 nghiệm $(1, -1)$; $(-\dfrac{86}{23}, -\dfrac{59}{23})$

Bài 2: *Giải và biện luận* $\begin{cases} x + y = m & (1) \\ x^2 - y^2 + 2x = 2 & (2) \end{cases}$

Giải:

Từ (1) $\Rightarrow y = m - x$. Thay vào (2) ta được: $2(m + 1)x = 2 + m^2$ (3)

– Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, khi đó (3) $\Leftrightarrow 0x = 3$ vô nghiệm. Vậy hệ vô nghiệm.

– Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, khi đó (3) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2 + m^2}{2(m + 1)}$

Suy ra $y = \dfrac{m^2 + 2m - 2}{2(m + 1)}$

Vậy, với $m = -1$, hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

với $m \neq -1$, hệ phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{2+m^2}{2(m+1)} \\ y = \dfrac{m^2+2m-2}{2(m+1)} \end{cases}$

Bài 3: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2 + y^2 - x = 0 & (1) \\ x + ay - a = 0 & (2) \end{cases}$

a. *Giải hệ phương trình khi a = 1*

b. *Tìm a để hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt*

c. *Gọi (x_1, y_1); (x_2, y_2) là các nghiệm của hệ đã cho. Chứng minh rằng $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \leq 1$*

Giải:

Từ (2) $\Rightarrow x = a - ay$, thay vào (1) ta được:

$(a^2 + 1)y^2 - a(2a - 1)y + a^2 - a = 0$ (3)

a. Với a = 1, khi đó (3) $\Leftrightarrow 2y^2 - y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 2 nghiệm (1, 0); $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

b. Hệ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (3) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 1 \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta = -3a^2 + 4a > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \dfrac{4}{3}$

c. Với $0 < a < \dfrac{4}{3}$ thì hệ có nghiệm $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$, trong đó y_1, y_2 là nghiệm của (3) và thoả mãn:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{a(2a-1)}{a^2+1} \\ y_1.y_2 = \dfrac{a^2 - a}{a^2+1} \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x_1 = a - ay_1 \\ x_2 = a - ay_2 \end{cases}$$

Khi đó: $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (ay_1 - ay_2)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$= (a^2 + 1)(y_2 - y_1)^2 = (a^2 + 1)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2]$

$= \dfrac{4a - 3a^2}{a^2+1} = 1 - \dfrac{(2a-1)^2}{a^2+1} \leq 1$

Bài 4: *Cho hệ phương trình:* $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2 + y^2 = m \end{cases}$ *(I)*

a. *Giải hệ phương trình với m = 5.*

b. *Tìm m để hệ có nghiệm.*

Giải:

Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases}$ điều kiện $S^2 \geq 4P$

Khi đó: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} S + P = m \\ S^2 - 2P = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = m - S & (1) \\ S^2 + 2S - 3m = 0 & (2) \end{cases}$

a. Với m = 5: (2) $\Leftrightarrow S^2 + 2S - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S = 3 \Rightarrow P = 2 \\ S = -5 \Rightarrow P = 10 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Suy ra: $\begin{cases} x + y = 3 \\ x.y = 2 \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = 1 \\ X = 2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm (1, 2); (2, 1)

b. Nhận xét rằng (I) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{(2) có nghiệm } S \\ S^2 \geq 4P \end{cases}$

- Ta có (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + 3m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{3}$ (3)

- Với $m \geq -\frac{1}{3}$ khi đó (2) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} S = -1 + \sqrt{1+3m} \\ S = -1 - \sqrt{1+3m} \end{array}\right.$

- Với $S = -1 + \sqrt{1+3m} \Rightarrow P = m + 1 - \sqrt{1+3m}$

  Vậy $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow (-1 + \sqrt{1+3m})^2 \geq 4(m + 1 - \sqrt{1+3m})$

  $\Leftrightarrow 2\sqrt{1+3m} \geq m + 2 \Leftrightarrow 4(1 + 3m) \geq m^2 + 4m + 4$

  (vì $m \geq -\frac{1}{3}$ nên $m + 2 > 0$)

  $\Leftrightarrow m^2 - 8m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 8$ (thoả mãn (3))

- Với $S = -1 - \sqrt{1+3m} \Rightarrow P = m + 1 + \sqrt{1+3m}$

  Vậy $S^2 \geq 4P \Leftrightarrow (-1 - \sqrt{1+3m})^2 \geq 4(m + 1 + \sqrt{1+3m})$

  $\Leftrightarrow 2\sqrt{1+3m} \leq -m - 2$ (vô nghiệm vì $m \geq -\frac{1}{3}$ nên $-m - 2 < 0$)

Như vậy, giá trị cần tìm của m là $0 \leq m \leq 8$.

Bài 5: *Cho phương trình:* $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases}$ *(I)*

a. Giải hệ phương trình khi m = –3.

b. Tìm m để hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

Giải:

Đặt $\begin{cases} x + y = S \\ x.y = P \end{cases}$

Khi đó: (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} S + P = m + 2 \\ S.P = m + 1 \end{cases}$

Suy ra S, P là nghiệm phương trình $t^2 - (m + 2)t + m + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = m + 1 \end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 1 \\ x.y = m + 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = m + 1 \\ x.y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $\left[\begin{array}{l} x, y \text{ là nghiệm phương trình } f(X) = X^2 - X + m + 1 = 0 \quad (1) \\ x, y \text{ là nghiệm phương trình } g(X) = X^2 - (m + 1)X + 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

a. Với $m = -3$, ta được

(1) $\Leftrightarrow X^2 - X - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \\ X = 2 \end{array}\right.$ Vậy hệ có nghiệm $(-1, 2)$; $(2, -1)$

(2) $\Leftrightarrow X^2 + 2X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = -1$ Vậy hệ có nghiệm $(-1, -1)$

Tóm lại, hệ phương trình có 2 nghiệm $(-1, 2)$; $(2, -1)$; $(-1, -1)$

b. Để hệ có nghiệm duy nhất thì

(1) vô nghiệm và (2) có nghiệm kép
(2) vô nghiệm và (1) có nghiệm kép
(1) và (2) có nghiệm kép bằng nhau

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_{(1)} < 0 \\ \Delta_{(2)} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_{(1)} = 0 \\ \Delta_{(2)} < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_{(1)} = \Delta_{(2)} = 0 \\ \dfrac{1}{2} = \dfrac{m + 1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -4m - 3 < 0 \\ m^2 + 2m - 3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -4m - 3 = 0 \\ m^2 + 2m - 3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m^2 - 2m - 3 = -4m - 3 = 0 \\ m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$$

Vậy, khi $m = 1$ hoặc $m = -3/4$ hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 6: *Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \quad (1) \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \quad (2) \end{cases}$

Giải:

Trừ từng vế các phương trình của hệ ta được:

$$3x^2 - 3y^2 = x - y \Leftrightarrow (x - y)(3x + 3y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x + 3y - 1 = 0 \end{array}\right.$$

Khi đó hệ đã cho tương đương với

$$\left\{\begin{array}{l} x = y \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{array}\right. \quad \text{hoặc} \quad \left\{\begin{array}{l} 3x + 3y - 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + 3x = 0 \end{array}\right. \quad \text{hoặc} \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1 - 3x}{3} \\ 9x^2 - 3x + 5 = 0 \end{array}\right. \quad \text{(vô nghiệm)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -3 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Vậy, hệ phương trình có 2 nghiệm (0, 0); (–3, –3).

Bài 7: *Cho hệ phương trình* $\left\{\begin{array}{l} x = y^2 - y + m \\ y = x^2 - x + m \end{array}\right.$

a. *Giải hệ phương trình khi m = 0.*
b. *Tìm m để hệ có nghiệm.*
c. *Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.*

Giải:

Trừ từng vế các phương trình của hệ ta được:

$$x - y = y^2 - x^2 - y + x \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right.$$

Khi đó hệ đã cho trở thành $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = y \\ x^2 - 2x + m = 0 \quad (1) \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ x^2 + m = 0 \quad (2) \end{array}\right. \end{array}\right.$

a. Với m = 0, hệ trở thành $\left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ x^2 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 2 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy, với m = 0, hệ phương trình có 2 nghiệm (0, 0); (2, 2)

b. Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Phương trình (1) có nghiệm}\\ \text{Phương trình (2) có nghiệm}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta'_{(1)} \ge 0\\ \Delta_{(2)} \ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-m \ge 0\\ -m \ge 0\end{array}\right. \Leftrightarrow m \le 1$$

c. – Điều kiện cần:

Ta có, nếu (x_o, y_o) là nghiệm của hệ phương trình đã cho thì (y_o, x_o) cũng là nghiệm của hệ phương trình đó. Do đó, để hệ có nghiệm duy nhất thì $x_o = y_o$'

Khi đó, hệ trở thành $x_0^2 - 2x_o + m = 0$ (3)

Do x_o là nghiệm duy nhất nên (3) có nghiệm duy nhất tức là:

$\Delta' = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$

– Điều kiện đủ:

Với m = 1 khi đó hệ trở thành $\begin{cases} x = y^2 - y + 1\\ y = x^2 - x + 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow x + y = y^2 - y + 1 + x^2 - x + 1$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy, với m = 1 thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất.

Bài 8: *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 = 15 & (1)\\ x^2 + xy + 2y^2 = 8 & (2)\end{cases}$

Giải:

Cách 1:

Ta có x = 0, y = 0 không phải là nghiệm của phương trình.

Đặt x = ky thì hệ phương trình trở thành $\begin{cases} (2k^2 + 3k + 1)y^2 = 15 & (3)\\ (k^2 + k + 2)y^2 = 8 & (4)\end{cases}$

Vì $y \ne 0$ nên từ (3) và (4) suy ra $k^2 + 9k - 22 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}k = 2\\ k = -11\end{array}\right.$

– Với k = 2 ta có x = 2y thay vào (2) ta được $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Vậy hệ có nghiệm (2, 1); (–2, –1)

– Với k = –11 ta có x = –11y thay vào (2) ta được

$$y^2 = \frac{1}{14} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow x = \mp\frac{11}{\sqrt{14}}$$

Vậy hệ có nghiệm $\left(-\frac{11}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}}\right); \left(\frac{11}{\sqrt{14}}, -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)$

Cách 2:

Khử số hạng tự do từ hệ ta được $x^2 + 9xy - 22y^2 = 0$ (5)

Đặt $x = ty$, khi đó (5) $\Leftrightarrow y^2(t^2 + 9t - 22) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ t = 2 \\ t = -11 \end{array}\right.$

– Với $y = 0$ hệ trở thành $\begin{cases} 2x^2 = 15 \\ x^2 = 8 \end{cases}$ vô nghiệm

– Với $t = 2$ ta được $x = 2y$

Do đó (2) $\Leftrightarrow y^2 - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{array}\right.$

– Với $t = -11$ ta được $x = -11y$

Do đó (2) $\Leftrightarrow y^2 = \dfrac{1}{14} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow x = -\dfrac{11}{\sqrt{14}} \\ y = -\dfrac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow x = \dfrac{11}{\sqrt{14}} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 4 nghiệm

Bài 9: *Giải và biện luận* $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 17 & (1) \\ x^2 - xy + 4y^2 = m & (2) \end{cases}$

Giải:

Nhận xét rằng nếu (x, y) là nghiệm thì $x \neq 0$, $y \neq 0$

Khi đó, khử số hạng x^2 từ hệ ta được $xy = 17 - m \Leftrightarrow x = \dfrac{17 - m}{y}$ (3)

Thay (3) vào (1) ta được: $4y^4 - 17y^2 + (17 - m)^2 = 0$ (4)

Đặt $y^2 = t \geq 0$

(4) $\Leftrightarrow 4t^2 - 17t + (17 - m)^2 = 0$

Ta có $\Delta = (4m - 51)(85 - 4m)$

– Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{51}{4} \vee m > \dfrac{85}{4}$

Khi đó (4) vô nghiệm. Vậy hệ vô nghiệm.

– Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{51}{4} \\ m = \dfrac{85}{4} \end{array}\right.$

Với $m = \dfrac{51}{4}$ thì (4) có nghiệm kép $t = \dfrac{17}{8}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{136}}{8} \Rightarrow x = \dfrac{34}{\sqrt{136}} \\ y = -\dfrac{\sqrt{136}}{8} \Rightarrow x = -\dfrac{34}{\sqrt{136}} \end{array}\right.$$

Với $m = \dfrac{85}{4}$ thì (4) có nghiệm kép $t = \dfrac{17}{8}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{136}}{8} \Rightarrow x = -\dfrac{34}{\sqrt{136}} \\ y = -\dfrac{\sqrt{136}}{8} \Rightarrow x = \dfrac{34}{\sqrt{136}} \end{array}\right.$$

– Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow \dfrac{51}{4} < m < \dfrac{85}{4}$

Khi đó (4) có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{17 + \sqrt{\Delta}}{8} > 0 \\ t_1 = \dfrac{17 - \sqrt{\Delta}}{8} > 0 \end{array}\right.$ (vì S > 0 và P > 0))

Với $t_1 = \dfrac{17 + \sqrt{\Delta}}{8}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} y_1 = \sqrt{t_1} \Rightarrow x_1 = \dfrac{17 - m}{\sqrt{t_1}} \\ y_2 = -\sqrt{t_1} \Rightarrow x_2 = \dfrac{17 - m}{-\sqrt{t_1}} \end{array}\right.$

Với $t_2 = \dfrac{17 - \sqrt{\Delta}}{8}$ suy ra $\left[\begin{array}{l} y_3 = \sqrt{t_2} \Rightarrow x_3 = \dfrac{17 - m}{\sqrt{t_2}} \\ y_4 = -\sqrt{t_2} \Rightarrow x_4 = \dfrac{17 - m}{-\sqrt{t_2}} \end{array}\right.$

Vậy, nếu $m < \dfrac{51}{4} \vee m > \dfrac{85}{4}$, hệ phương trình vô nghiệm

nếu $m = \dfrac{51}{4}$ hệ có nghiệm $(2, \dfrac{17}{8})$

$m = \dfrac{85}{4}$ hệ có nghiệm $(-2, \dfrac{17}{8})$

nếu $\dfrac{51}{4} < m < \dfrac{85}{4}$ hệ có 4 nghiệm (x_1, y_1); (x_2, y_2);

(x_3, y_3); (x_4, y_4)

Khi y = 0 là nghiệm suy ra hệ : $\begin{cases} x^2 = 17 \\ x^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{17}$.

Vậy khi m = 17 thì hệ có nghiệm $((\sqrt{17};0); (-\sqrt{17};\ 0)$.

C. BÀI TẬP

Bài 1. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} 3x + 4y + 1 = 0 \\ xy = 3(x + y) - 9 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - 5y - 4 = 0 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

Bài 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 8 \\ x + 2y = m \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với m = 4.
b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 2 \\ x + y = m \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với m = 2.
b. Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.

Bài 4. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x + y = 10 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 2 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$
d. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ (x - 1)(y - 1) = 18 \end{cases}$

e. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$
f. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + xy = \dfrac{7}{2} \\ 2(x + y) = 3xy \end{cases}$

g. $\begin{cases} x^2 + x - y + y^2 = 4 \\ x(x - y + 1) + y(y - 1) = 2 \end{cases}$
h. $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - x + y = 6 \\ xy - x + y = -3 \end{cases}$

Bài 5. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = m \\ x + y = 6 \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình với m = 26.
b. Tìm m để hệ vô nghiệm.
c. Tìm m để hệ có 1 nghiệm duy nhất.
d. Tìm m để hệ có 2 nghiệm phân biệt.

Bài 6. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + xy + y = a + 1 \\ x^2y + xy^2 = a \end{cases}$

Xác định a để hệ có ít nhất 1 nghiệm (x, y) thoả mãn $x > 0$; $y > 0$

Bài 7. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x^2 + xy = 3x \\ 2y^2 + xy = 3y \end{cases}$

c. $\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}$

d. $\begin{cases} x = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ y = \dfrac{2x}{1-x^2} \end{cases}$

Bài 8. Giải và biện luận $\begin{cases} x^2 + 2xy = mx + y \\ y^2 + 2xy = my + x \end{cases}$

Bài 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} xy + x^2 = m(y - 1) \\ xy + y^2 = m(x - 1) \end{cases}$

a. Giải hệ phương trình khi $m = -1$.

b. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 10. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} x^2 + 2xy + 3y^2 = 9 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = 1 \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

Bài 11. Tìm a để hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

§1 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Bài 1

a. Phương trình đã cho tương đương với: $(9-3m)x = 2m + 7$

$m \neq 3$, phương trình có 1 nghiệm $x = \dfrac{2m+7}{9-3m}$

$m = 3$, phương trình vô nghiệm.

b. Phương trình đã cho tương đương với: $(m-2)(m+2)x = 2m(m-2)$

$m \neq \pm 2$, phương trình có 1 nghiệm $x = \dfrac{2m}{m+2}$

$m = 2$, phương trình có vô số nghiệm $x \in R$.

$m = -2$, phương trình vô nghiệm

c. Phương trình đã cho tương đương với: $(m-1)x = (m-1)^2$

$m \neq 1$, phương trình có 1 nghiệm $x = m - 1$

$m = 1$, phương trình có vô số nghiệm $x \in R$

d. Phương trình đã cho tương đương với: $(m-1)(m+1)x = (m+1)(m+2)$

$m \neq \pm 1$, phương trình có 1 nghiệm $x = \dfrac{m+2}{m-1}$.

$m = -1$, phương trình có vô số nghiệm $x \in R$.

$m = 1$, phương trình vô nghiệm.

e. Phương trình đã cho tương đương với: $(m^2 - m + 1)x = 3m - 2$

Ta có: $m^2 - m + 1 = m^2 - m + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4} = (m - \dfrac{1}{2})^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall m$

Vậy phương trình luôn có 1 nghiệm $x = \dfrac{3m-2}{m^2 - m + 1}$.

Bài 2

a. Điều kiện $x \neq -3$

Phương trình đã cho tương đương với: $x = 2m + 2$

Nếu $m \neq -\dfrac{5}{2}$, phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 2m + 2$

Nếu $m = -\dfrac{5}{2}$, phương trình vô nghiệm.

b. Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương với: $(m + 4)x = 3$

Nếu $m \neq -4$ và $m \neq -1$, phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{3}{m+4}$

Nếu $m = -4$ hoặc $m = -1$, phương trình đã cho vô nghiệm.

c. Điều kiện $x \neq 1$ và $x \neq m$

Phương trình đã cho tương đương với: $0x = (m-1)^2$

Nếu $m = 1$, phương trình đã cho có vô số nghiệm $x \neq 1$.

Nếu $m \neq 1$, phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 3

a. Phương trình đã cho tương đương với: $(a^2 - b^2)x = a(a^2 - b^2)$

Nếu $a \neq \pm b$, phương trình có nghiệm $x = a$.

Nếu $a = \pm b$, phương trình có vô số nghiệm.

b. Phương trình đã cho tương đương với: $abx = ab$

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$, phương trình có 1 nghiệm $x = 1$.

Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$, phương trình có vô số nghiệm.

c. Điều kiện $x \neq \pm 1$

Phương trình đã cho tương đương với: $(a - 2)x = 2 - a$

Nếu $a \neq 2$, phương trình vô nghiệm.

Nếu $a = 2$, phương trình đã cho có vô số nghiệm $x \neq \pm 1$.

d. Điều kiện $x \neq \pm 1$

Phương trình đã cho tương đương với: $(a + b - 1)x = a + b + 1$

Nếu $a + b \neq 1$ và $a + b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$.

Nếu $a + b = 1$ hoặc $a + b = 0$, phương trình vô nghiệm.

Bài 4

a. ĐS: $x = \dfrac{1}{6}$ hoặc $x = \dfrac{3}{4}$

b. ĐS: $x = -\dfrac{1}{2}$ hoặc $x = \dfrac{6}{5}$

c. ĐS: $x = -2$

d. ĐS: $x = 1$

e. ĐS: Vô nghiệm

Vì phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} 1 - 2x > 0 \\ 2x + 3 = |6 - x| \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ 2x + 3 = 6 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

f. ĐS: $x \leq 1$

g. ĐS: $x = 1$ hoặc $x = 4$

Vì ta có: $|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{nếu} \quad x \geq 3 \\ 3 - x & \text{nếu} \quad x < 3 \end{cases}$

$$|2 - x| = \begin{cases} 2 - x & \text{nếu} \quad x \leq 2 \\ x - 2 & \text{nếu} \quad x > 2 \end{cases}$$

Khi đó:

– Nếu $x \leq 2$ phương trình trở thành: $3 - x + 2 - x = 3$

$\Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (thoả mãn $x \le 2$)

– Nếu $2 < x \le 3$ phương trình trở thành: $0x = 2$ (vô nghiệm)

– Nếu $x > 3$ phương trình trở thành: $2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$ (thoả mãn $x > 3$)

h. ĐS: $x = -6$ hoặc $x = 0$ (giải tương tự câu g)

i. ĐS: $x = -1$ hoặc $x = 2$

Để ý phương trình đã cho tương đương $|x + 1| + |x - 2| = 3$ và giải tương tự bài g, h.

Bài 5

a. Phương trình đã cho tương đương với:
$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x \ge 1 \\ (1-m)x = 2m \quad (1)\end{cases} & (\mathrm{I}) \\ \begin{cases} x < 1 \\ (m+1)x = 2-2m \quad (2)\end{cases} & (\mathrm{II})\end{array}\right.$$

– Giải và biện luận (I)

Nếu $m = 1$ thì $(1) \Leftrightarrow 0x = 2$ (vô nghiệm)

Nếu $m \ne 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{2m}{1-m}$

Ta có $\dfrac{2m}{1-m} \ge 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le m < 1$

Vậy: Với $m < \dfrac{1}{3}$ hoặc $m \ge 1$ thì phương trình (I) vô nghiệm.

Với $\dfrac{1}{3} \le m < 1$ thì phương trình (I) có 1 nghiệm $x = \dfrac{2m}{1-m}$.

– Giải và biện luận (II)

Nếu $m = -1$ thì $(2) \Leftrightarrow 0x = 4$ (vô nghiệm)

Nếu $m \ne -1$ thì $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{2-2m}{m+1}$

Ta có: $\dfrac{2-2m}{m+1} < 1 \Leftrightarrow m < -1$ hoặc $m > \dfrac{1}{3}$

Vậy: Với $-1 \le m \le \dfrac{1}{3}$ phương trình (II) vô nghiệm

Với $m < -1$ hoặc $m > \dfrac{1}{3}$ phương trình (II) có 1 nghiệm $x = \dfrac{2-2m}{m+1}$

Tóm lại:

– Nếu $m < -1$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{2-2m}{m+1}$

– Nếu $-1 \le m < \dfrac{1}{3}$ thì phương trình đã cho vô nghiệm

– Nếu $m = \frac{1}{3}$ thì phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = 1$

– Nếu $\frac{1}{3} < m < 1$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm $x = \frac{2m}{1-m}$

và $x = \frac{2-2m}{m+1}$

– Nếu $m \geq 1$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{2-2m}{m+1}$

b. Phương trình đã cho tương đương với: $\left[\begin{array}{l} mx+1 = 3x+m-1 \\ mx+1 = -3x-m+1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m-3)x = m-2 & (1) \\ (m+3)x = -m & (2) \end{array}\right.$$

– Nếu $m = 3$ thì (1) vô nghiệm

– Nếu $m \neq 3$ thì (1) có nghiệm $x = \frac{m-2}{m-3}$

– Nếu $m = -3$ thì (2) vô nghiệm

– Nếu $m \neq -3$ thì (2) có nghiệm $x = \frac{-m}{m+3}$

Vậy: Nếu $m = 3$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{-m}{m+3}$

Nếu $m = -3$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{m-2}{m-3}$

Nếu $m \neq \pm 3$ thì phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{-m}{m+3}$ hoặc

$x = \frac{m-2}{m-3}$

c. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} mx+2 = 1-x \\ mx+2 = x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ \left[\begin{array}{ll} (m+1)x = -1 & (1) \\ (m-1)x = -3 & (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

– Giải và biện luận (1)

Nếu $m = -1$ thì (1) vô nghiệm

Nếu $m \neq -1$ thì (1) $\Leftrightarrow x = -\frac{1}{m+1}$.

Ta có: $-\frac{1}{m+1} < 1 \Leftrightarrow \frac{-m-2}{m+1} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > -1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$

– Giải và biện luận (2)

Nếu $m = 1$ thì (2) vô nghiệm

Nếu $m \neq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{m-1}$

Ta có: $-\dfrac{3}{m-1} \leq 1 \Leftrightarrow \dfrac{-m-2}{m-1} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$

Vậy: Với $-2 < m < -1$: phương trình vô nghiệm.

Với $m \leq 2$: phương trình có 2 nghiệm $x = \dfrac{-m}{m+1}$ và $x = \dfrac{-3}{m-1}$

Với $-1 < m < 1$: phương trình có nghiệm $m = \dfrac{-1}{m+1}$

Bài 6

a. Phương trình đã cho tương đương với $(m^2 - 5m + 4)x = m - 1$

Phương trình vô nghiệm khi $\begin{cases} m^2 - 5m + 4 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ hoặc } m = 4 \\ m \neq 1 \end{cases}$

Vậy: $m = 4$

b. Điều kiện $x \neq m$ khi đó phương trình đã cho trở thành: $(m - 3)x = 2 - 4m$

Phương trình vô nghiệm khi $\left[\begin{array}{l} m - 3 = 0 \\ \begin{cases} m - 3 \neq 0 \\ x = \dfrac{2-4m}{m-3} = m \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ \begin{cases} m \neq 3 \\ m^2 + m - 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ \begin{cases} m \neq 3 \\ m = 1 \text{ hoặc } m = -2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy: Phương trình vô nghiệm khi $m = 1$; $m = -2$; $m = 3$

Bài 7

a. Phương trình đã cho tương đương với: $(m - 1)(m - 2)x = m(m - 1)$

Phương trình có nghiệm khi: $\left[\begin{array}{l} (m-1)(m-2) \neq 0 \\ \begin{cases} (m-1)(m-2) = 0 \\ m(m-1) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \neq 1 \text{ và } m \neq 2 \\ m = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow m \neq 2$$

b. Giải tương tự câu a

ĐS: $m \neq 2$

c. Điều kiện $x > 1$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với: $2x = 8 - m$

Vậy, phương trình có nghiệm khi $\dfrac{8-m}{2} > 1 \Leftrightarrow m < 6$

d. Điều kiện $|x| \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với $(m + 1)|x| = 2m + 1$

Phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \dfrac{2m+1}{m+1} \geq 0 \\ \dfrac{2m+1}{m+1} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < -1 \text{ hoặc } m \geq -\dfrac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$

ĐS: $m < -1$ hoặc $-\dfrac{1}{2} \leq m < 0$ hoặc $m > 0$

e. Điều kiện $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với: $2x = 5 - m \Leftrightarrow x = \dfrac{5-m}{2}$

Vậy, phương trình có nghiệm khi $-2 < \dfrac{5-m}{2} < 2 \Leftrightarrow 1 < m < 9$

§2. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1

a. $D = m^2 - 1$; $D_x = m(m + 1)$; $D_y = m + 1$

– Nếu $m \neq \pm 1$, hệ có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{m}{m-1} \\ y = \dfrac{1}{m-1} \end{cases}$

– Nếu $m = 1$, hệ vô nghiệm

– Nếu $m = -1$, hệ có vô số nghiệm (x, y) thoả mãn $x + y = 0$

b. $D = m^2 + m$; $D_x = 3m$; $D_y = -m$

– Nếu $m \neq 0$ hoặc $m \neq -1$, hệ có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{3}{m+1} \\ y = \dfrac{-1}{m+1} \end{cases}$

– Nếu $m = 0$, hệ có vô số nghiệm $(x; -1)$ với x tuỳ ý

– Nếu $m = -1$, hệ có vô số nghiệm

c. $D = (m - 1)^2 + 1$; $D_x = 2m^2 - 3m + 2$; $D_y = m^2 - 3m + 2$

Ta có: $D \neq 0\ \forall m$, vậy hệ có 1 nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m^2 - 3m + 2}{m^2 - 2m + 2} \\ y = \dfrac{m^2 - 3m + 1}{m^2 - 2m + 2} \end{cases}$

Bài 2

a. $D = b^2(1-a)$; $D_x = b^2(4+b-a^2)$; $D_y = b(4a+b-a^2)$

- Nếu $D \neq 0$ tức là $b \neq 0$ và $a \neq 1$, hệ có 1 nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x = \dfrac{4+b-a^2}{1-a} \\ y = \dfrac{4a+b-a^2}{b(1-a)} \end{cases}$$

- Nếu $a = 1$; $b \neq 0$; $b \neq -3$ thì $D = 0$; $D_x \neq 0$; $D_y \neq 0$, hệ vô nghiệm
- Nếu $a = 1$; $b = -3$, hệ có vô số nghiệm (x, y) với $x + 3y = 4$
- Nếu $b = 0$; $a \neq 0$ hệ có vô số nghiệm $\begin{cases} x = a \\ y \in R \end{cases}$
- Nếu $b = 0$; $a = 0$ hệ có vô số nghiệm (x, y) với $x, y \in R$

b. (Khi xác định các định thức cần chú ý thứ tự các hệ số của x và y)

$D = 2ab$; $D_x = 2a^2 + b^2 - 2a$; $D_y = b^2 - 2a^2$

- Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$, thì hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2a^2+b^2-2ab}{2ab} \\ y = \dfrac{b^2-2a^2}{2ab} \end{cases}$
- Nếu $a = 0$ và $b = 0$, thì hệ có vô số nghiệm (x, y) với $x, y \in R$
- Nếu $a = 0$ và $b \neq 0$ hoặc $a \neq 0$ và $b = 0$, thì hệ vô nghiệm

Bài 3

Ta có: $D = m^2 - 1$; $D_x = 2m^2 - m - 1$; $D_y = m^2 - m$

a. Nếu $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y = \dfrac{m}{m+1} \end{cases}$

Nếu $m = 1$, hệ có vô số nghiệm (x, y) mà $x + y = 2$

Nếu $m = -1$, hệ vô nghiệm

b. Với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x_o = \dfrac{2m+1}{m+1} \\ y_o = \dfrac{m}{m+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 2 - \dfrac{1}{m+1} \\ y_o = 1 - \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$

Suy ra, $x_o - y_o = 1$ là hệ thức liên hệ giữa x_o, y_o không phụ thuộc vào m

c. Với $m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm $\begin{cases} x_o = 2 - \dfrac{1}{m+1} \\ y_o = 1 - \dfrac{1}{m+1} \end{cases}$

Để $x_o, y_o \in Z$ thì $\dfrac{1}{m+1} \in Z$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l} m+1=1 \\ m+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Bài 4

a. Ta có: $D = m^2 - 4$; $Dx = 3m - 6$; $Dy = 6m - 12$
Hệ có vô số nghiệm khi $D = Dx = Dy = 0 \Leftrightarrow m = 2$

b. Ta có: $D = -m^2 + 2m + 3$; $Dx = -3m^2 + 8m - 1$; $Dy = 2m^2 - 4m$
Hệ có vô số nghiệm khi $D = Dx = Dy = 0$ (vô nghiệm)
Vậy, không tìm được giá trị m thoả mãn yêu cầu bài toán.

c. Ta có: $D = (a + b)(a - 3)$; $Dx = (a + b)(b - 2a + 1)$;
$Dy = a^2 + 4a - 4b - 1$

Để hệ có vô số nghiệm, trước hết $D = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ a=3 \end{array}\right.$

– Nếu $a = -b$, khi đó $\begin{cases} Dx = 0 \\ Dy = a^2 + 8a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-4+\sqrt{17} \\ a=-4-\sqrt{17} \end{array}\right.$

– Nếu $a = 3$, khi đó $\begin{cases} Dx = (b+3)(b-5) = 0 \\ Dy = -4b + 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = 5$

Tóm lại: Với ($a = -4 + \sqrt{17}$ và $b = 4 - \sqrt{17}$) hoặc ($a = -4 - \sqrt{17}$ và $b = 4 + \sqrt{17}$) hoặc ($a = 3$ và $b = 5$) thì hệ có vô số nghiệm

Bài 5

a. Ta có: $D = -(m + 2)(m + 4)$; $Dx = -(m - 1)(m + 2)$;
$Dy = -(m + 2)(m + 9)$

Hệ vô nghiệm khi $\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} Dx \neq 0 \\ Dy \neq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m = -4$

b. Ta có: $D = a^2 - b^2$; $Dx = a^2 + b^2$; $Dy = a^2 - 2ab - b^2$
Hệ vô nghiệm khi $a = \pm b$ và khác 0

Bài 6

a. Ta có: $D = m^2 - 4$; $Dx = m^2 - 3m + 2$; $Dy = 2m^2 - 3m - 2$
– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$
Với $m = 2$, khi đó hệ trở thành: $2x + 2y = 3 \Leftrightarrow 2(x + y) = 3$ (*)
Vậy, không tồn tại (x, y) nguyên thoả mãn (*).
Với $m = -2$, hệ vô nghiệm

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Khi đó: $\begin{cases} x = 1 - \dfrac{3}{m+2} \\ y = 2 - \dfrac{3}{m+2} \end{cases}$

Để $x, y \in Z$ thì $\dfrac{3}{m+2} \in Z$

Suy ra, giá trị cần tìm là $m \in \{-5; -3; -1; 1\}$

b. $D = m^2 - 1$; $Dx = 3m^2 - 2m - 1$; $Dy = 2m^2 - 2m$

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, hệ có vô số nghiệm (x, y) nguyên thoả mãn $x + y = 3$

Với $m = -1$, hệ vô nghiệm

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$, hệ có nghiệm $\begin{cases} x = 3 - \dfrac{2}{m+1} \\ y = 2 - \dfrac{2}{m+1} \end{cases}$

Để $x, y \in Z$ thì $\dfrac{2}{m+1} \in Z$

Suy ra, giá trị cần tìm là $m \in \{-3; -2; 0; 1\}$

Bài 7

Ta có: $D = m + 1$; $Dx = (m + 1)^2$; $Dy = (m + 1)(m - 3)$

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Khi đó hệ có nghiệm $\begin{cases} x = m + 1 \\ y = m - 3 \end{cases}$

Suy ra: $x^2 + y^2 = 2m^2 - 4m + 10 = 2(m - 1)^2 + 8 \geq 8$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của $x^2 + y^2$ là 8 và đạt được khi $m = 1$

Bài 8

Ta có: $D = -m^2 - m - 1$; $Dx = 1 - m^3 = (1 - m)(1 + m + m^2)$

$Dy = m^3 - m^2 - m - 2 = (m - 2)(m^2 + m + 1)$

Vì $D = -(m + \dfrac{1}{2})^2 - \dfrac{3}{4} < 0$ với $\forall m$ hay $D \neq 0$

Vậy, hệ luôn có nghiệm $\begin{cases} x = m - 1 \\ y = 2 - m \end{cases}$

Khi đó: $x.y = (m - 1)(2 - m) = -m^2 + 3m - 2 = \dfrac{1}{4} - (m - \dfrac{3}{2})^2 \leq \dfrac{1}{4}$

Vậy, giá trị lớn nhất của xy là $\dfrac{1}{4}$ và đạt được khi $m = \dfrac{3}{2}$

Bài 9

Ta có: $D = b^2 + b - 6$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow b \neq -3$ và $b \neq 2$, khi đó hệ có nghiệm $\forall a$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow b = -3$ hoặc $b = 2$

– Với $b = -3$, hệ trở thành $\begin{cases} -3x - y = ac^2 \\ -9x - 3y = c + 1 \end{cases}$ (*)

Ta có: $Dx = -3ac^2 + c + 1$; $Dy = 3(3ac^2 - c - 1)$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow Dx = Dy = 0 \Leftrightarrow 3ac^2 - c - 1 = 0$ (1)

Như vậy, bài toán quy về tìm a để phương trình (1) có nghiệm c

+ Nếu $a = 0$, ta có (1) $\Leftrightarrow c = -1$. Vậy $a = 0$ là giá trị cần tìm

+ Nếu $a \neq 0$, ta có (1) có nghiệm c khi $\Delta_c \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq a \neq 0$.

Từ đó suy ra phương trình (1) có nghiệm c khi $a \geq -\frac{1}{12}$

– Với $b = 2$, hệ trở thành $\begin{cases} 2x - y = ac^2 \\ -4x + 2y = c + 1 \end{cases}$ (**)

Ta có: $Dx = 2ac^2 + c + 1$; $Dy = 2(2ac^2 + c + 1)$

Hệ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow Dx = Dy = 0 \Leftrightarrow 2ac^2 + c + 1 = 0$

Tương tự ta tìm được $a \leq \frac{1}{8}$

Do vậy, giá trị cần tìm của a là $-\frac{1}{12} \leq a \leq \frac{1}{8}$

Bài 10

Ta có: $D = m^2 + 3m - 4$

– Nếu $D \neq 0$ tức là $m \neq 1$ và $m \neq -4$. Hệ có nghiệm duy nhất với mọi a, b

– Nếu $m = 1$, hệ trở thành $\begin{cases} 4x + 4y = 5a + 3b + 1 \\ x + y = a - 2b + 1 \end{cases}$ (*)

$Dx = a + 11b - 3$; $Dy = -a - 11b + 3$

Hệ (*) có nghiệm $\Leftrightarrow Dx = Dy = 0 \Leftrightarrow a + 11b = 3$

– Nếu $m = -4$, hệ trở thành $\begin{cases} -x + 4y = 5a + 3b - 4 \\ x - 4y = a - 2b - 9 \end{cases}$ (**)

Tương tự trên, hệ (**) có nghiệm $\Leftrightarrow 6a + b = 13$

Vậy, để hệ có nghiệm $\forall m \Leftrightarrow$ a, b là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} a + 11b = 3 \\ 6a + b = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{28}{13} \\ b = \dfrac{1}{13} \end{cases}$$

Bài 11

Xét hệ $\begin{cases} 3x - ay = -2 \\ 3x + y = -a \end{cases}$ (*)

Ta có: $D = 3(a + 1)$

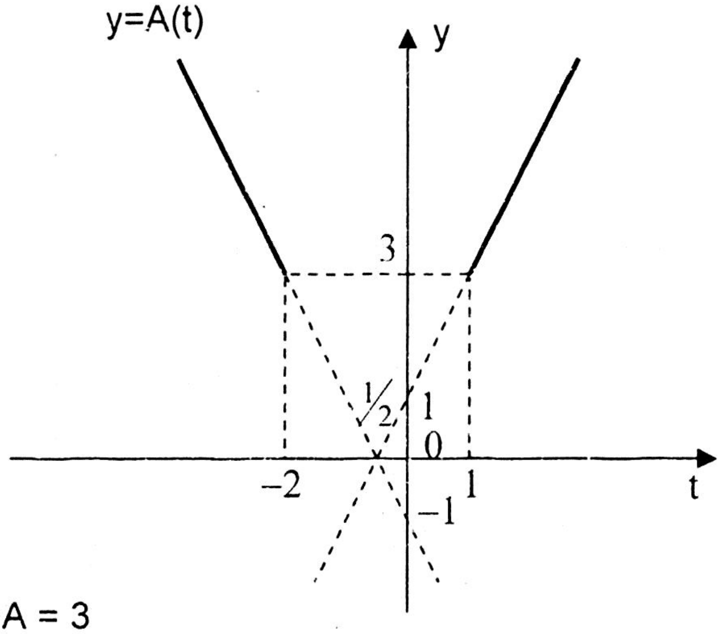
- Nếu $a \neq -1 \Leftrightarrow D \neq 0$, hệ (*) có nghiệm duy nhất, do đó minA = 0

- Nếu $a = -1 \Leftrightarrow D = 0$,

khi đó $A = |3x + y + 2| + |3x + y - 1|$

$$= |t + 2| + |t - 1| = \begin{cases} -2t - 1 & \text{nếu} \quad t \leq -2 \\ 3 & \text{nếu} \quad -2 < t \leq 1 \\ 2t + 1 & \text{nếu} \quad t > 1 \end{cases}$$

Vẽ đồ thị



Từ đó suy ra: minA = 3

Chú ý: *Nếu hệ số của x; y trong hai hạng tử của vế phải có giá trị tuyệt đối bằng nhau thì chúng ta có thể tìm minA bằng cách sử dụng bất đẳng thức* $|a| + |b| \geq |a \pm b|$

Chẳng hạn, đối với bài 11 ta có thể giải cách khác như sau:

Xét hệ $\begin{cases} 3x - ay = -2 \\ 3x + y = -a \end{cases}$ *(*)*

Ta có: $D = 3(a + 1)$

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$, *hệ (*) có nghiệm duy nhất, do đó minA = 0*

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a = -1$, *khi đó:*

$A = |3x + y + 2| + |3x + y - 1| \geq |(3x + y + 2) - (3x + y - 1)| = 3$

Ta lại có với $x = 0$ *và* $y = 0$ *thì* $A(0,0) = 3$

Vậy, minA = 3

Bài 12

$B = (x - 2y + 1)^2 + (2x + ay + 5)^2$

Xét hệ $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 2x + ay = -5 \end{cases}$ (*)

Ta có: $D = a + 4$

– Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -4$, hệ (*) có nghiệm duy nhất. Vậy minB = 0

– Nếu $D = 0 \Leftrightarrow a = -4$, khi đó $B = (x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y + 5)^2$

Đặt t = x – 2y, suy ra:

$$B = (t+1)^2 + (2t+5)^2 = 5t^2 + 22t + 26 = 5\left(t + \frac{11}{5}\right)^2 + \frac{9}{5} \geq \frac{9}{5}$$

Vậy, $\min B = \frac{9}{5}$ khi $t = -\frac{11}{5}$ hay khi x, y thoả mãn $x - 2y = -\frac{11}{5}$ $\Leftrightarrow 5x - 10y = -11$

Chú ý: *Đối với bài này ta có thể dùng đồ thị hàm số để suy ra giá trị bé nhất của B.*

Bài 13

Xét hệ phương trình $\begin{cases} bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$

Ta có: $D = ba - c^2$; $D_x = a^2 - bc$; $D_y = b^2 - ac$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow ba - c^2 \neq 0$, hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - bc}{ba - c^2} \\ y = \dfrac{b^2 - ac}{ba - c^2} \end{cases}$

Nghiệm trên thoả mãn phương trình ax + by = c

$$\Leftrightarrow a.\frac{a^2 - bc}{ba - c^2} + b.\frac{b^2 - ac}{ba - c^2} = c \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow ba - c^2 = 0$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow D_x = D_y = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c^2 - ab = 0 \\ a^2 - bc = 0 \\ b^2 - ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c^3 = abc \\ a^3 = abc \\ b^3 = abc \end{cases} \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Bài 14

Xét hệ gồm hai phương trình $\begin{cases} 2x + (3m+1)y = 6 \\ mx + 2y = 2m + 1 \end{cases}$ (*)

Ta có: $D = (m-1)(-3m-4)$; $D_x = (m-1)(-6m-11)$; $D_y = 2 - 2m$

a. Nếu $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ và $m \neq -\frac{4}{3}$. Khi đó hệ (*) có nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{6m+11}{3m+4} \\ y = \dfrac{2}{3m+4} \end{cases}$

Để nghiệm đó là nghiệm của hệ thì:

$$(4-m)\frac{6m+11}{3m+4} + 6.\frac{2}{3m+4} = m + 8$$

$$\Leftrightarrow \quad 9m^2 + 15m - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = 1 & \text{(loại)} \\ m = \dfrac{8}{3} & \end{array}\right.$$

b. Nếu $D = 0 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{4}{3}$

– Với m = 1, khi đó hệ trở thành $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y = 3$

Vậy hệ có vô số nghiệm (x, y) thoả mãn $x + 2y = 3$

– Với $m = -\dfrac{4}{3}$, khi đó hệ vô nghiệm

Từ đó: Với $m = \dfrac{8}{3}$, hệ đã cho có 1 nghiệm $\begin{cases} x = \dfrac{6m+11}{3m+4} = \dfrac{27}{12} \\ y = \dfrac{2}{3m+4} = \dfrac{1}{6} \end{cases}$

Với m = 1, hệ đã cho có vô số nghiệm (x, y) thoả mãn $x + 2y = 3$

Với $m \neq 1$ và $m \neq \dfrac{8}{3}$, hệ vô nghiệm

Bài 15

Xét hệ $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{5} \\ y = -\dfrac{8}{5} \end{cases}$

Để hệ có nghiệm thì: $-2(-\dfrac{1}{5}) + a.(-\dfrac{8}{5}) = a - 1$

$$\Leftrightarrow \quad 2 - 8a = 5a - 5 \Leftrightarrow 13a = 7 \Leftrightarrow a = \frac{7}{13}$$

Bài 16

Đáp số: a. $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = 5 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$

Bài 17

a. Gọi $M(x_o, y_o)$ là điểm cố định mà (d_1) luôn đi qua $\forall k$, khi đó:

$kx_o - y_o + k = 0 \quad \forall k$

$\Leftrightarrow \quad (x_o + 1)k - y_o = 0 \quad \forall k$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o + 1 = 0 \\ y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_o = 0 \end{cases}$

Vậy đường thẳng (d_1) luôn đi qua điểm $(-1;0)$

b. Ta có phương trình $kx - y + k = 0$ luôn là phương trình đường thẳng

Ta có: $(1 - k^2)^2 + 4k^2 = (k^2 + 1)^2 > 0$ nên $(1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2)$ luôn là phương trình đường thẳng

Xét hệ phương trình $\begin{cases} kx - y = -k \\ (1-k^2)x + 2ky = 1 + k^2 \end{cases}$

Ta có: $D = k^2 + 1$; $Dx = 1 - k^2$; $Dy = 2k$

Vì $D \neq 0$ với $\forall k$ nên hệ luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \dfrac{1-k^2}{1+k^2} \\ y = \dfrac{2k}{1+k^2} \end{cases}$

Vậy (d_1) và (d_2) luôn cắt nhau tại $A\left(\dfrac{1-k^2}{1+k^2}; \dfrac{2k}{1+k^2}\right)$

§3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1

Tự giải

Bài 2

Đáp số:

a. $m \leq 3$

b. Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thì $m = 2$

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả $|x_1 - x_2| \leq 2$ thì $2 \leq m \leq 3$

c. Để phương trình có 2 nghiệm không âm thì $-1 \leq m \leq 3$

Khi đó $A^2 = x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2} = 4 + 2\sqrt{m+1}$

$\Rightarrow \quad A = \sqrt{4 + 2\sqrt{m+1}}$

d. Ta có: $y_1 + y_2 = x_1 + x_2 = 4$

Từ $\dfrac{y_1}{1-y_2} + \dfrac{y_2}{1-y_1} = 3$ suy ra $y_1.y_2 = -3$

Vậy y_1, y_2 là nghiệm phương trình $y^2 - 4y - 3 = 0$

Bài 3

Đáp số:

a. $|m| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b. Với $|m| \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ta có x_1, x_2 là nghiệm phương trình đã cho và

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(2m+1) = 4m+2 \\ x_1.x_2 = 3 + 4m \end{cases}$$

Suy ra $x_1 + x_2 - x_1.x_2 + 1 = 0$

c. $A = (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1.x_2] = (4m + 2)(16m^2 + 4m - 5)$

d. Khi phương trình có nghiệm x_1 và $3x_1$ thì $\begin{cases} x_1 + 3x_1 = 2 + 4m \\ x_1.3x_1 = 3 + 4m \end{cases}$

Suy ra: $3x_1^2 - 4x_1 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2+\sqrt{7}}{3} \\ x_2 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3} \end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1+2\sqrt{7}}{6} \\ m = \dfrac{1-2\sqrt{7}}{6} \end{array}\right.$

e. Ta có $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 2(8m^2 + 4m - 1)$

$x_1^2 . x_2^2 = (x_1.x_2)^2 = (3 + 4m)^2$

Do đó x_1^2, x_2^2 là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - 2(8m^2 + 4m - 1)x + (3 + 4m)^2 = 0$$

Bài 4

a. Đáp số: $-5 \le m \le -1$

b. Với $-5 \le m \le -1$ ta có:

$$A = \left|\frac{m^2 + 4m + 3}{2} + 2(m+1)\right| = \left|\frac{m^2 + 8m + 7}{2}\right| = \left|\frac{(m+1)(m+7)}{2}\right|$$

Với $-5 \le m \le -1$ ta có $(m + 1)(m + 7) \le 0$

Do đó $A = -\dfrac{m^2 + 8m + 7}{2} = \dfrac{9}{2} - \dfrac{1}{2}(m+4)^2 \le \dfrac{9}{2}$

Vậy $\max A = \dfrac{9}{2}$ khi $m = -4$

Bài 5

Để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả yêu cầu bài toán thì ta phải có:

$$\begin{cases} \Delta = -3m^2 + 12 \ge 0 \\ P = m^2 - 3 > 0 \\ S = m > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le m \le 2 \\ m < -\sqrt{3} \text{ hoặc } m > \sqrt{3} \\ m > 0 \\ m = \pm\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Vô nghiệm}$$

Bài 6

Đáp số:

a. $-2 < m < 2$

b. $-\frac{53}{14} < m < -2$ hoặc $m > 2$

c. $-\frac{53}{14} < m < -2$ hoặc $m > 2$

Bài 7

a. Ta có $\Delta' = \sin^2\alpha + 1 - \cos\alpha \geq 0$ vì $\sin^2\alpha \geq 0$; $1 - \cos\alpha \geq 0$

Vậy phương trình luôn luôn có nghiệm

b. Ta có: $x_1 + x_2 = 2\sin\alpha$

$x_1.x_2 = \cos\alpha - 1$

(x_1, x_2 là nghiệm của phương trình)

Suy ra: $(x_1 + x_2)^2 + 4(x_1.x_2 + 1)^2 - 4 = 0$ (vì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$)

Bài 8

$mx^2 - 2(m - 3)x + m - 4 = 0$ (1)

a. Với $m = 0$ phương trình (1) $\Leftrightarrow 6x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$ (thoả mãn yêu cầu bài toán)

Với $m \neq 0$, phương trình có đúng 1 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ x = \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \\ x_1 \leq 0 < x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -2m + 9 = 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \end{cases} \\ \dfrac{m-4}{m} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = \dfrac{9}{2} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 3 \end{cases} \\ 0 < m \leq 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9}{2} \\ 0 < m \leq 4 \end{array}\right.$$

Vậy m cần tìm là $m = \frac{9}{2}$ hoặc $0 \leq m \leq 4$

b. Phương trình có 2 nghiệm đều âm tức là $x_1 \leq x_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -2m + 9 \geq 0 \\ P = \dfrac{m-4}{m} > 0 \\ S = \dfrac{2(m-3)}{m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{9}{2} \\ m < 0 \text{ hoặc } m > 4 \text{ (vô nghiệm)} \\ 0 < m < 3 \end{cases}$$

c. Phương trình (1) có ít nhất một nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Phương trình có 1 nghiệm dương}\\ \text{Phương trình có 2 nghiệm dương}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \dfrac{9}{2} \text{ hoặc } \quad 0 \le m \le 4\\ 0 < x_1 < x_2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m = \dfrac{9}{2} \text{ hoặc } \quad 0 \le m \le 4\\ m < 0 \text{ hoặc } \quad 4 < m \le \dfrac{9}{2}\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow m \le \dfrac{9}{2}$$

Bài 9

a. Ta có phương trình luôn có nghiệm vì $\Delta = m^2 - 4m + 4 = (m + 2)^2 \ge 0\ \forall m$

b. Đáp số $m < 1$

c. Đáp số $m > 1$

d. Đáp số: 1/ $m = 0$ và $m = 8$

2/ $\min A = 8$ với $m = 4$

Bài 10

a. $m = -1$ hoặc $m = 3$

b. $m = -6$; $x = \dfrac{4}{5}$

c. $m = \dfrac{3}{5}$

d. Phương trình $(m + 1)^2x - (2m^2 - 6m + 8)x + (m - 2)^2 = 0$

Bài 11

a. Đáp số $k = \dfrac{50}{9}$ khi đó các nghiệm của (1) là $x = \dfrac{5}{3}$ hoặc $x = \dfrac{10}{3}$

b. Đáp số $k = 6$

c. Đáp số $k = 0$ hoặc $k = 6$

Hướng dẫn: – Trước hết để phương trình có nghiệm thì $\Delta_1 \ge 0$; $\Delta_2 \ge 0$ tức là $k \ge \dfrac{25}{4}$

– Theo yêu cầu bài toán ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5\\ x_1.x_2 = k\\ x_3 + x_4 = 7\\ x_3.x_4 = 2k\\ 2x_1 = x_3\end{cases}$

Suy ra $k = 0$ hoặc $k = 6$

Bài 13

Ta có: $\Delta = (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4c^2b^2$

$= (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)$

$= [a^2 - (b - c)^2][a^2 - (b + c)^2]$

Vì $a > b - c \Rightarrow a^2 > (b - c)^2$

$a < b + c \Rightarrow a^2 < (b + c)^2$

Vậy $\Delta < 0$ hay phương trình vô nghiệm.

Bài 14

Ta có $\begin{cases} a + b = -p \\ a.b = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} c + d = -q \\ c.d = 1 \end{cases}$

Biến đổi $(a - c)(a + d)(b - c)(b + d)$

$= (a - c)(b - c)(a + d)(b + d)$

$= [ab - c(a + b) + c^2][ab + d(a + b) + d^2]$

$= (1 + cp + c^2)(1 - dp + d^2)$

$= (1 + d^2 + c^2 + c^2d^2) + p(c - d + cd^2 - c^2d) - p^2cd$

$= (c^2 + d^2 + 2) + p[(c - d) - cd(c - d)] - p^2$

$= c^2 + d^2 + 2cd + p(c - d)(1 - cd) - p^2$

$= (c + d)^2 + p(c - d)(1 - cd) - p^2 = q^2 - p^2$

Bài 15

a. Đáp số $1 \neq m < \dfrac{21}{20}$

b. Ta có $(x_1 - a)(x_2 - a) = (a + 1)^2 + \dfrac{a + 6}{m - 1}$

Để $(x_1 - a)(x_2 - a)$ độc lập với m thì $a + 6 = 0 \Leftrightarrow a = -6$

§4. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1

a. Đáp số: Nghiệm $\left(3, -\dfrac{5}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{13}{3}; 3\right)$

b. Đáp số: Nghiệm $(2, 1)$; $\left(-\dfrac{4}{9}, \dfrac{20}{9}\right)$

Bài 2

a. Đáp số: Nghiệm $(2,1)$

b. Từ phương trình bậc nhất ta có $2y = m - x$

Thay vào phương trình bậc hai ta được: $2x^2 - 2mx + m^2 - 8 = 0$

$\Delta' = 16 - m^2$

Khi đó:
- Nếu $m < -4$ hoặc $m > 4$ hệ phương trình vô nghiệm
- Nếu $m = -4$ hệ có nghiệm $(-2, -1)$
- Nếu $m = 4$ hệ có nghiệm $(2,1)$
- Nếu $-4 < m < 4$ hệ có nghiệm (x_1, y_1) (x_2, y_2)

Với $x_1 = \dfrac{m + \sqrt{16 - m^2}}{2}$; $y_1 = \dfrac{m - \sqrt{16 - m^2}}{4}$

$x_1 = \dfrac{m - \sqrt{16 - m^2}}{2}$; $y_1 = \dfrac{m + \sqrt{16 - m^2}}{4}$

Bài 3

a. Đáp số: Nghiêm $(1;1)$

b. Rút y từ phương trình bậc nhất vào phương trình bậc hai ta thu được:

$2(m + 1)x = 2 + m^2$

– Nếu $m = -1$, hệ vô nghiệm.

– Nếu $m \neq -1$, hệ có một nghiệp duy nhất.

Bài 4

Bạn đọc tự giải.

Bài 5

Biến đổi hệ về dạng $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = \dfrac{36 - m}{2} \end{cases}$

Khi đó x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - 6X + \dfrac{36 - m}{2} = 0$ (*)

Ta có số nghiệm của hệ là số nghiệm của phương trình (*)

a. Đáp số: Nghiệm $(1, 5)$; $(5, 1)$

b. Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow m - 18 < 0 \Leftrightarrow m < 18$

c. Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta'_{(*)} = 0 \Leftrightarrow m - 18 = 0 \Leftrightarrow m = 18$

d. Hệ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'_{*} > 0 \Leftrightarrow m > 18$

Bài 6

Đặt $S = x + y$, $P = xy$

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases} S + P = a + 1 \\ S.P = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = a \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} S = a \\ P = 1 \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm của phương trình:

$X^2 - X + a = 0$ (1) hoặc $X^2 - ax + 1 = 0$ (2)

Ta có a thoả mãn yêu cầu bài toán (*) nếu như (1) hoặc (2) có 2 nghiệm dương.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 1 - 4a \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a \leq \dfrac{1}{4} \\ a \geq 2 \end{array}\right.$$

Bài 7

Bạn đọc tự giải.

Bài 8

Trừ vế ta được: $x^2 - y^2 = (m - 1)(x - y) \Leftrightarrow (x - y)(x + y - m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = m - 1 - x \end{array}\right.$$

– Với y = x, thay vào hệ ta đuợc:

$$3x^2 = (m + 1)x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 = y \\ x = \dfrac{m+1}{3} = y \end{array}\right.$$

– Với y = m – 1 – x thay vào hệ ta được: $x^2 - (m - 1)x + m - 1 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta = (m - 1)(m - 5)$

Vậy:

– Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$ Phương trình (*) vô nghiệm, do đó hệ có 2 nghiệm (0, 0); $\left(\dfrac{m+1}{3};\dfrac{m+1}{3}\right)$

– Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$

Với m= 1 phương trình (*) có nghiệm x = 0, y = 0

Do đó hệ có nghiệm (0, 0); $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$

Với m = 5, phương trình (*) có nghiệm $x = 2 \Leftrightarrow y = 2$

Do đó hệ có nghiệm (0, 0); (2, 2)

– Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 1 \vee m > 5$, phương trình (*) có 2 nghiệm:

$$x_1 = \frac{m - 1 + \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2} \Leftrightarrow y_1 = \frac{m - 1 - \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}$$

$$x_2 = \frac{m - 1 - \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2} \Leftrightarrow y_2 = \frac{m - 1 + \sqrt{(m-1)(m-5)}}{2}$$

Do đó hệ có 4 nghiệm:

$$(0, 0); \left(\frac{m+1}{3};\frac{m+1}{3}\right); (x_1, y_1); (x_2, y_2)$$

Bài 9

Biến đổi hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - mx + m = 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} y = -m - x \\ m^2 + m = 0 \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

a. Đáp số: Nghiệm của hệ $(-1, -1)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\begin{cases} x \text{ tuỳ ý} \\ x + y = 1 \end{cases}$

b. Nhận xét:

– Nếu (x_0, y_0) là nghiệm thì (y_0, x_0) cũng là nghiệm do đó hệ có nghiệm duy nhất khi $x_0 = y_0$

Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x_0^2 - mx_0 + m = 0$ (3)

Vậy x_0 là nghiệm duy nhất khi $\Delta_{(3)} = m^2 - 8m = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 8 \end{array}\right.$$

Ngược lại

Với m = 0, hệ trở thành $\begin{cases} xy + x^2 = 0 \\ xy + y^2 = 0 \end{cases}$ Hệ có vô số nghiệm

Với m = 8, hệ trở thành $\begin{cases} xy + x^2 = 8(y - 1) \\ xy + y^2 = 8(x - 1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x \\ 2x^2 - 8x + 8 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 8 - x \\ 72 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi m = 8.

Bài 10

Bạn đọc tự giải.

Bài 11

Đặt $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} = m$

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 & (1) \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = m & (2) \end{cases}$

Nhận xét rằng, nếu (x,y) là nghiệm của hệ thì $x \neq 0$. Khử số hạng y^2 ta được:

$2xy = 40 + 3m - 11x^2$

$\Rightarrow y = \dfrac{40 + 3m - 11x^2}{2x}$ (3)

Thay vào hệ ta được:

$105x^4 - 2(31m + 408)x^2 + (3m + 40)^2 = 0$

Đặt $t = x^2$ ta được:

$f(t) = 105t^2 - 2(31m + 408)t + (3m + 40)^2 = 0$ (4)

Hệ có nghiệm thì (4) có ít nhất một nghiệm không âm

$\Leftrightarrow$ (4) có 2 nghiệm $0 \le t_1 \le t_2$ (vì $\frac{c}{a} \ge 0$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge -3 + \sqrt{105}$$

$\Leftrightarrow$ $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 92 + \sqrt{105} \ge -3 + \sqrt{105}$

$\Leftrightarrow$ $a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 9 \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(a^2 - 2a)^2 \ge 9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 2a \le -3 \\ a^2 - 2a \ge 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \le -1 \\ a \ge 3 \end{array}\right.$$

Vậy a cần tìm là $a \le -1$ hoặc $a \ge 3$

Chương IV
BẤT ĐẲNG THỨC – BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa: $A < B \Leftrightarrow A - B < 0;$

$A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0.$

2. Tính chất: * $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases} \Rightarrow A < C$

* $A < B \Leftrightarrow A + C < B + C;\ A < B + C \Leftrightarrow A - C < B.$

* $\begin{cases} A < B \\ C < D \end{cases} \Rightarrow A + C < B + D.$

* $A < B \Leftrightarrow A.C < B.C$ nếu $C > 0;$

$A < B \Leftrightarrow A.C > B.C$ nếu $C < 0.$

* $\begin{cases} 0 < A < B \\ 0 < C < D \end{cases} \Rightarrow A.C < B.D$

* $0 < A < B \Leftrightarrow A^n < B^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$; $0 < A < B \Leftrightarrow \sqrt[n]{A} < \sqrt[n]{B}$ $(n \in \mathbf{N}, n > 1).$

3. Một số phương pháp chứng minh bất đẳng thức: $A > B$:

1) Chứng minh: $A - B > 0$, hoặc dùng các phép biến đổi tương đương để chứng minh $A > B$ tương đương với 1 bất đẳng thức đúng.

2) Xuất phát từ 1 bất đẳng thức đúng.

3) Biến đổi 1 vế của bất đẳng thức.

4) Sử dụng tính chất $\begin{cases} A < B \\ B < C \end{cases} \Rightarrow A < C$ *(tính chất bắc cầu).*

5) Phản chứng.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Chứng minh bất đẳng thức bằng cách chứng minh: $A - B > 0$, hoặc dùng các phép biến đổi tương đương.***

Bài 1: *Chứng minh các bất đẳng thức:*

a) $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ *với mọi* $a \geq 0, b \geq 0.$

b) $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geq \dfrac{a + b}{2} . \dfrac{a^2 + b^2}{2}$ *với* $a + b \geq 0.$

Giải:

a) *Cách 1:*

Xét hiệu: $(a^3 + b^3) - (a^2b + ab^2) = (a^3 - a^2b) - (ab^2 - b^3)$

$= a^2(a - b) - b^2(a - b) =$

$= (a - b)(a^2 - b^2) = (a - b)^2(a + b)$. Ta có: $(a - b)^2 \geq 0$ với mọi a,b và do $a \geq 0$, $b \geq 0$ nên $a + b \geq 0$. Từ đó: $(a - b)^2(a + b) \geq 0$ với $a \geq 0$, $b \geq 0$. Dấu " =" xảy ra khi a = b.

Vậy: $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2$ với mọi $a \geq 0$, $b \geq 0$. Dấu " =" xảy ra khi a = b.

Cách 2: Biến đổi tương đương: $(a^3 + b^3) \geq (a^2b + ab^2)$

$\Leftrightarrow (a^3 - a^2b) - (ab^2 - b^3) \geq 0 \Leftrightarrow a^2(a - b) - b^2(a - b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 - b^2) \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b) \geq 0$.

Bất đẳng thức cuối cùng là 1 bất đẳng thức đúng (chứng minh như trên), vì vậy ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Xét hiệu:

$$\frac{a^3+b^3}{2} - \frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{2} - \frac{a+b}{2}.\frac{a^2+b^2}{2}$$

$$= \frac{a+b}{2}\left(a^2 - ab + b^2 - \frac{a^2+b^2}{2}\right) = \frac{a+b}{2}.\frac{a^2-2ab+b^2}{2} = \frac{a+b}{4}.(a-b)^2 \geq 0$$

(Vì $a + b \geq 0$ và $(a - b)^2 \geq 0$).

Vậy: $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geq \dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^2+b^2}{2}$ với $a + b \geq 0$.

Dấu " =" xảy ra khi a = −b hoặc a = b.

Chú ý: – Khi chứng minh bất đẳng thức dạng $A \geq B$ ta nên chỉ ra trường hợp dấu đẳng thức (dấu " =") xảy ra.

– Thực chất 2 cách làm trên chỉ là một nên ta cũng có thể sử dụng biến đổi tương đương để chứng minh bất đẳng thức ở câu b.

Bài 2: *Cho abc = 1 và $a^3 > 36$, chứng minh rằng:*

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca.$$

Giải: Xét hiệu

$$\frac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) = \left(\frac{a^2}{4} + b^2 + c^2 - ab - ca + 2bc\right) + \frac{a^2}{12} - 3bc =$$

$$= \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^2 - 36bc}{12} = \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36abc}{12a}$$

$$= \left(\frac{a}{2} - b - c\right)^2 + \frac{a^3 - 36}{12a}$$

Ta có: $\left(\dfrac{a}{2} - b - c\right)^2 \geq 0$; $a^3 > 36 \Rightarrow a > \sqrt[3]{36} > 0$ và $a^3 - 36 > 0 \Rightarrow \dfrac{a^3 - 36}{12a} > 0$.

Từ đó: $\dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{3} + b^2 + c^2 > ab + bc + ca$ (đpcm).

Dạng 2: ***Chứng minh bất đẳng thức xuất phát từ 1 bất đẳng thức đúng.***

Bài 3: *Với a, b, c là các số dương.*

a) Chứng minh rằng: nếu a < b thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$.

b) Chứng minh: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

Giải: a) Ta có: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a}.a > \frac{1}{b}.a \Leftrightarrow 1 > \frac{a}{b} \Leftrightarrow 1.b > \frac{a}{b}.b \Leftrightarrow b > a$

(đây là giả thiết bài toán).

$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \Leftrightarrow a(b + c) < b(a + c) \Leftrightarrow ab + ac < ba + bc \Leftrightarrow ac < bc$

$\Leftrightarrow$ a < b (đây là giả thiết bài toán). Vậy ta có đpcm.

b) Sử dụng các bất đẳng thức đã chứng minh ở câu a):

* Ta có: $a + b < a + b + c \Rightarrow \frac{1}{a+b} > \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$ (1);

Tương tự: $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$ (2); $\frac{c}{c+a} > \frac{c}{a+b+c}$ (3).

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta được:

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$.

* Ta có: $a < a + b \Rightarrow \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$ (4);

Tương tự: $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{a+b+c}$ (5); $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{a+b+c}$ (6).

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (4), (5) và (6) ta được:

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Vậy: $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Bài 4: *a) Chứng minh bất đẳng thức:* $(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$ *với mọi a,b,c, d.*

b) Áp dụng: cho $4x + y = 1$*, chứng minh:* $4x^2 + y^2 \ge \frac{1}{5}$.

Giải:

a) $(a^2 + c^2)(b^2 + d^2) - (ab + cd)^2 = a^2b^2 + a^2d^2 + c^2b^2 + c^2d^2 - (a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2)$ $= a^2d^2 - 2abcd + c^2b^2 = (ad - cb)^2 \ge 0$ với mọi a, b, c, d. Dấu bằng xảy ra khi ad = bc (hay $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \ne 0$, $d \ne 0$).

b) Ta có: $1 = (4x + y)^2 = (2.2x + 1.y)^2 \le (2^2 + 1^2)[(2x)^2 + y^2] = 5(4x^2 + y^2)$

$\Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 \ge \frac{1}{5}$.

Chú ý: Bất đẳng thức ở câu a) có thể viết ở dạng khác:

$|ab + cd| \le \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$ và được gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpxki.

Dạng 3: ***Chứng minh bất đẳng thức bằng cách biến đổi 1 vế của bất đẳng thức đó.***

Bài 5: *Chứng minh các bất đẳng thức:*

a) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} < 1$ *(n ∈ **N****);

b) $\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$ *(n ∈ **N****).

Giải:

a) Ta có: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ nên:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} < 1$$

b) Ta có: $(2k + 1)^2 > (2k + 1)^2 - 1 = 2k(2k + 2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{2k(2k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+2}\right).$$

Từ đó:

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2}\right) < \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Chú ý: Phương pháp sử dụng ở câu b) còn được gọi là phương pháp làm trội.

Dạng 4: ***Chứng minh bất đẳng thức bằng cách sử dụng tính chất bắc cầu.***

Bài 6: *Cho a, b, c > 0 thoả* $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{23}{12}$. *Chứng minh:* $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}$.

Giải:

Ta có: $0 \le (a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab - ac - bc) \Leftrightarrow 2(ac + bc - ab) \le a^2 + b^2 + c^2$

$\Leftrightarrow ac + bc - ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow ac + bc - ab \le \frac{23}{24} < 1.$

Chia hai vế cho abc > 0, ta được: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}$.

Dạng 5: ***Chứng minh bất đẳng thức bằng phương pháp chứng minh phản chứng.***

Bài 7: *Cho a, b là 2 số dương và* $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2<1$. *Chứng minh rằng không thể đồng thời xảy ra a<1 và b < 1.*

Giải:

Giả sử đồng thời xảy ra $a < 1$ và $b < 1 \Rightarrow a^2 < 1$ và $b^2 < 1$. Ta có:
$(1 - a^2)(1 - b^2) > 0 \Leftrightarrow 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow 1 + a^2b^2 > a^2 + b^2$

$$\Leftrightarrow 1 + a^2b^2 + 2ab > a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow (1 + ab)^2 > (a + b)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2>1$$

Bất đẳng thức cuối cùng mâu thuẫn với giả thiết bài toán $\left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2<1$.

Vậy ta có đpcm.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Với mọi a, b, c, chứng minh:

a) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$;

b) $a^2+b^2+c^2 \geq 2ab-2bc+2ca$;

c) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$;

d) $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$;

e) $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$.

Bài 2: Với mọi a, b, c, d, e, chứng minh:

a) $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 \geq a(b+c+d+e)$;

b) $a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{2}\,a(b+c)$;

c) Cho n số thực $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), chứng minh:

$$a_1^2+a_2^2+a_3^2+\ldots+a_n^2 \geq \frac{2}{\sqrt{n-1}}a_1\left(a_2+a_3+\ldots+a_n\right).$$

(HD: Dựa vào cách làm câu a, b).

Bài 3: Chứng minh các bất đẳng thức:

a) Với a, b, c > 0, chứng minh: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)$;

b) Cho $a \geq c \geq 0$; $b \geq c$, chứng minh: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$;

c) Cho $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$, chứng minh: $a^2 - b^2 + c^2 \geq (a - b + c)^2$.
Từ đó hãy suy ra: $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c - d)^2$.

d) Cho $0 < a < b < c$, chứng minh:

$$b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{b}(a + c) < (a + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right);$$

e) $(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4)$ với mọi a, b, c.

f) Cho $ab \geq 1$, chứng minh: $\dfrac{1}{1+a^2} + \dfrac{1}{1+b^2} \geq \dfrac{2}{1+ab}$.

Từ đó suy ra: $\dfrac{1}{1+a^3} + \dfrac{1}{1+b^3} + \dfrac{1}{1+c^3} \geq \dfrac{3}{1+abc}$ với $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$.

g) Chứng minh rằng: $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) + 10 \geq 1$ với mọi x.

Bài 4: Cho $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ và $b_1 \leq b_2 \leq b_3$. Chứng minh rằng:

a) $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \cdot \dfrac{b_1 + b_2}{2} \leq \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{2}$;

b) $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \cdot \dfrac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \leq \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{3}$;

c) Chứng minh bài toán tổng quát: Cho 2n số thực: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$) thoả: $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$; $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Chứng minh:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n}{n}$$

(Bất đẳng thức Trêbưsep);

d) Áp dụng: Cho x, y, z > 0, chứng minh:

- $(x + y)(x^5 + y^5)(x^9 + y^9) \leq 4(x^{15} + y^{15})$;
- $\dfrac{x^{2007} + y^{2007} + z^{2007}}{x^{2006} + y^{2006} + z^{2006}} \geq \dfrac{x + y + z}{3}$.

Bài 5: Cho 3 số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh:

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} + \frac{(b+c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(c+a)^2}{(c-a)^2} \geq 2.$$

Bài 6: a) Cho $0 \leq x, y, z \leq 1$, chứng minh: $\dfrac{x}{yz+1} + \dfrac{y}{zx+1} + \dfrac{z}{xy+1} \leq 2$;

b) Cho $0 < x, y, z, t < 1$, chứng minh:

$$(1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 - t) > 1 - x - y - z - t.$$

Bài 7: Cho a, b, c là số đo độ dài 3 cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh:

a) $0 < a, b, c < 1$;

b) $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$;

c) $\dfrac{ab}{1-c} + \dfrac{bc}{1-a} + \dfrac{ca}{1-b} \geq 4$.

Bài 8: Chứng minh rằng nếu a +b = 2cd thì ít nhất một trong 2 bất đẳng thức sau đây là đúng: $c^2 \geq a$; $d^2 \geq b$.

Bài 9: Cho 3 số a, b, c thoả mãn: $a + b + c > 0$, $ab + bc + ca > 0$, $abc > 0$. Chứng minh rằng: $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

§2. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ–SI. BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Bất đẳng thức Cô–si: $\forall a, b \geq 0$: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$; *đẳng thức xảy ra khi* $a = b$.

** Hệ quả: – Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.*

– Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

Chú ý: Người ta cũng chứng minh được bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm: $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$; *đẳng thức xảy ra khi* $a = b = c$.

2. Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối:

* $|a + b| \leq |a| + |b|$; *đẳng thức xảy ra khi* $ab \geq 0$.

* $|a - b| \leq |a| + |b|$; *đẳng thức xảy ra khi* $ab \leq 0$.

* *Với* $\forall a > 0$: $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$;

$$|x| \geq a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Sử dụng bất đẳng thức Cô–si để chứng minh bất đẳng thức.***

Bài 1: *Chứng minh:*

a) $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$ $(a, b, c > 0)$;

b) $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$ $(a \geq 1, b \geq 1)$;

c) $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}$ $(a, b, c, d > 0)$.

Giải:

a) Theo bất đẳng thức Cô–si, ta có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$; $b + c \geq 2\sqrt{bc}$;

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$.

Nhân vế theo vế các bất đẳng thức trên ta được:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc.$$

Đẳng tthức xảy ra khi a = b =c.

b) Theo bất đẳng thức Cô−si, ta có:

$$\sqrt{a-1} = \sqrt{1(a-1)} \le \frac{1+(a-1)}{2} = \frac{a}{2} \Rightarrow b\sqrt{a-1} \le \frac{ab}{2} \text{ (1);}$$

Tương tự: $a\sqrt{b-1} \le \frac{ab}{2}$ (2). Cộng (1) và (2) ta được:

$$a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \le ab.$$

Đẳng thức xảy ra khi: a − 1 = 1; b − 1 = 1 ⇔ a = 2; b = 2.

c) Ta có: $\dfrac{a+b+c+d}{4} = \dfrac{\dfrac{(a+b)+(c+d)}{2}}{2}$.

Theo bất đẳng thức Cô−si, ta có: $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$; $\sqrt{cd} \le \dfrac{c+d}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} \ge \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} = \frac{\frac{(a+b)+(c+d)}{2}}{2} = \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \ge \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2} \ge \sqrt{\sqrt{ab}.\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Đẳng thức xảy ra khi: a = b = c = d.

Chú ý: Bất đẳng thức ở câu c) là bất đẳng thức Cô−si cho 4 số không âm.

Bài 2: *Chứng minh:*

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3$ *(a, b, c > 0);*

b) $3a^3 + 6b^3 \ge 9ab^2$ *(a, b ≥ 0).*

Giải: a) Áp dụng bất đẳng thức Cô−si cho 3 số không âm, ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}} = 3$$ Vậy ta có đpcm

b) Ta có: $3a^3 + 6b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 3b^3$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô−si cho 3 số không âm:

$$3a^3 + 3b^3 + 3b^3 \ge 3\sqrt[3]{3a^3.3b^3.3b^3} = 9ab^2.$$

Vậy ta có đpcm.

Bài 3: *Cho x, y, z là các số dương.*

a) Chứng minh: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y}$

b) Giả sử $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$, *chứng minh:* $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \le 1$

(Đề thi ĐH khối A − 2005).

Giải:

a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{4}{x+y}=\frac{y(x+y)+x(x+y)-4xy}{xy(x+y)}=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy(x+y)}=\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$; dấu = xảy ra khi x = y.

b) *Cách 1*: Sử dụng BĐT $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta có:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{x+y}+\frac{4}{x+z}=4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x+z}\right)\ge\frac{16}{2x+y+z}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{x+y}+\frac{4}{y+z}=4\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\right)\ge\frac{16}{x+2y+z}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{4}{x+z}+\frac{4}{y+z}=4\left(\frac{1}{x+z}+\frac{1}{y+z}\right)\ge\frac{16}{x+y+2z}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 16\left(\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le 1.$$

Cách 2: Ta có: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}\Leftrightarrow\frac{1}{x+y}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

Sử dụng BĐT Côsi cho 2 số dương, ta có:

$$2x+y+z=(x+y)+(x+z)\ge 2(\sqrt{xy}+\sqrt{xz})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z}\le\frac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{xy}+\sqrt{xz}}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{xz}}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$; $\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{xz}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}\right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}\le\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)$$

$$\le\frac{1}{8}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)=1$$

Cách 3: Sử dụng BĐT Côsi cho 4 số dương (đã chứng minh ở trên):

$$(x+x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge 4\sqrt[4]{x^2yz}.4\sqrt[4]{\frac{1}{x^2yz}}=16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)$; $\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{2}{z}\right)$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z} \le \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x}+\frac{4}{y}+\frac{4}{z}\right)=1.$$

Dạng 2: ***Sử dụng các hệ quả của bất đẳng thức Cô–si để tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số (hay biểu thức).***

Bài 1: *Tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:*

a) $A=(1-x)(2x-1)$ *với* $\frac{1}{2}<x<1$;

b) $B=x^3(16-x^3)$ *với* $0<x<2\sqrt[3]{2}$.

c) $C=(3-x)(4-y)(2x+3y)$ *với* $0<x<3$; $0<y<4$.

Giải:

a) $A=(1-x)(2x-1)=\frac{1}{2}(2-2x)(2x-1)$. Vì $\frac{1}{2}<x<1$ nên $2-2x>0$; $2x-1>0$.

Ta có: $(2-2x)+(2x-1)=1$.

Do đó theo hệ quả của bất đẳng thức Cô–si, ta có: A lớn nhất khi

$$2-2x=2x-1 \Leftrightarrow x=\frac{3}{4}.$$

Vậy GTLN của A là $(1-\frac{3}{4})(2.\frac{3}{4}-1)=\frac{1}{8}$ khi $x=\frac{3}{4}$.

b) Với $0<x<2\sqrt[3]{2}$ thì $x^3>0$; $16-x^3>0$. Mặt khác: $x^3+(16-x^3)=16$. Theo hệ quả của bất đẳng thức Cô–si, ta có: B lớn nhất khi $x^3=16-x^3$ $\Leftrightarrow x^3=8 \Leftrightarrow x=2$.

Vậy GTLN của B là: $2^3(16-2^3)=64$ khi $x=2$.

c) $C=(3-x)(4-y)(2x+3y)=\frac{1}{6}(6-2x)(12-3y)(2x+3y)$.

Vì $0<x<4$; $0<y<4$ nên $6-2x>0$; $12-3y>0$; $2x+3y>0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm, ta có:

$$\sqrt[3]{(6-2x)(12-3y)(2x+3y)} \le \frac{(6-2x)+(12-3y)+(2x+3y)}{3}=6$$

$\Leftrightarrow$ $(6-2x)(12-3y)(2x+3y)\le 6^3$, đẳng thức xảy ra khi:

$6-2x=12-3y=2x+3y \Leftrightarrow x=0$; $y=2$.

Vậy GTLN của C là 36 khi $x=0$; $y=2$.

Nhận xét: Để sử dụng các hệ quả của bất đẳng thức Cô–si để tìm giá trị lớn nhất của một biểu thức thì biểu thức đó ở dạng tích và ta có thể biến đổi để tổng các thừa số của tích là một hằng số.

Bài 2: *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:*

a) $A = x + \dfrac{1}{x-2}$ *với* $x > 2$; b) $B = \dfrac{(x+2006)^2}{x}$ *với* $x > 0$.

Giải:

a) $A = x + \dfrac{1}{x-2} = (x-2) + \dfrac{1}{x-2} + 2$.

Vì $x > 2$ nên $x - 2 > 0$; $\dfrac{1}{x-2} > 0$. Mặt khác: $(x-2).\dfrac{1}{x-2} = 1$.

Theo hệ quả của bất đẳng thức Cô–si, ta có: $(x-2) + \dfrac{1}{x-2}$ nhỏ nhất khi

$x - 2 = \dfrac{1}{x-2} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy GTNN của A là 4 khi $x = 3$.

b) $B = \dfrac{(x+2006)^2}{x} = \dfrac{x^2 + 2.2006x + 2006^2}{x} = x + \dfrac{2006^2}{x} + 2.2006$.

Vì $x > 0$ nên $\dfrac{2006^2}{x} > 0$. Mặt khác: $x.\dfrac{2006^2}{x} = 2006^2$.

Theo hệ quả của bất đẳng thức Cô–si, ta có: $x + \dfrac{2006^2}{x}$ nhỏ nhất khi

$x = \dfrac{2006^2}{x} \Leftrightarrow x = 2006$.

Vậy GTNN của B là $3.2006 = 6018$ khi $x = 2006$.

Nhận xét: Để sử dụng các hệ quả của bất đẳng thức Cô–si để tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức thì biểu thức đó ở dạng tổng và ta có thể biến đổi để tích các số hạng của tổng đó là một hằng số.

Dạng 3: ***Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối.***

Bài 1: *Chứng minh: Với mọi a,b, c:*

a) $|a-b| \geq |a| - |b|$. b) $|a-b| + |b-c| \geq |a-c|$

Giải:

a) Ta có: $|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b| \Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$;

Đẳng thức xảy ra khi $(a-b)b \geq 0$.

b) $|a-b| + |b-c| \geq |(a-b) + (b-c)| = |a-c|$.

Đẳng thức xảy ra khi $(a-b)(b-c) \geq 0$

Bài 2: *Tìm giá trị lớn nhất của:*

$$P = |x+1| + |y+5| + |z+7| \text{ với } |x| + |y| + |z| = 1994$$

Giải:

Ta có: $|x+1| \leq |x| + 1$; $|y+5| \leq |y| + 5$; $|z+7| \leq |z| + 7$. Do đó:

$P = |x+1| + |y+5| + |z+7| \leq |x| + |y| + |z| + 13 = 1994 + 13 = 2007$.

Đẳng thức xảy ra khi $x + 1$; $y + 5$; $z + 7$ không âm và $|x| + |y| + |z| = 1994$.
Chẳng hạn: $x = 1000$; $y = 900$; $z = 4$, ta có:

$|x + 1| = 1001$; $|y + 5| = 905$; $|z + 7| = 11 \Rightarrow P = 1001 + 905 + 11 = 2007$.
Vậy GTLN của P là 2007.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng:

a) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2$; b) $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \ge 9$

c) $a + \frac{1}{b(a-b)} \ge 3$ $(a > b)$; d) $\frac{1}{a^2 + bc} + \frac{1}{b^2 + ca} + \frac{1}{c^2 + ab} \le \frac{a + b + c}{2abc}$

e) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$; f) $\frac{2\sqrt{a}}{a^3 + b^2} + \frac{2\sqrt{b}}{b^3 + c^2} + \frac{2\sqrt{c}}{c^3 + a^2} \le \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Bài 2: Cho các số dương x, y, z thoả mãn xyz = 1. Chứng minh rằng:

a) $(1 + x)(1 + y)(1 + z) \ge 8$;

b) $\frac{\sqrt{1 + x^3 + y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1 + y^3 + z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1 + z^3 + x^3}}{zx} \ge 3\sqrt{3}$

Bài 3: Cho các số dương x, y, z thoả mãn x + y + z = 1. Chứng minh rằng:

a) $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \ge 8xyz$ b) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(1 + \frac{1}{z}\right) \ge 64$

c) $\sqrt{x + y} + \sqrt{y + z} + \sqrt{z + x} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Bài 4: Cho tam giác ABC có độ dài các cạnh là a, b, c; p là độ dài nửa chu vi; R, r lần lượt là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh:

a) $(p - a)(p - b)(p - c) \le \frac{1}{8}abc$ b) $\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \ge 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

c) $R \ge 2r$

Bài 5: Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số:

a) $y = 3x(3 - 2x)$ với $0 \le x \le \frac{3}{2}$

b) $y = ax(b - cx)$ với $0 \le x \le \frac{b}{c}$ và a, b, c > 0

c) $y = x^2(1 - x)^2$ với $0 \le x \le 1$ d) $y = x^2(1 - x)$ với $0 \le x \le 1$.

Bài 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = x + \frac{1}{3x}$ với x > 0; b) $y = x + \frac{2}{x + 1}$ với x > 0;

c) $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x > 0$; d) $y = x + \frac{2}{x^2}$ với $x > 0$;

e) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ với $x > 0$.

Bài 7: Khi giải bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = x + \frac{2}{x}$ với $0 < x \le 1$.

Hai bạn Việt và Nam có 2 lời giải khác nhau như sau:

Lời giải của Việt: Do $0 < x \le 1$ nên x và $\frac{2}{x}$ đều dương, do đó:

$$x + \frac{2}{x} \ge 2\sqrt{x.\frac{2}{x}} = 2\sqrt{2}.$$

Vậy GTNN của hàm số là $2\sqrt{2}$ khi $x = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \sqrt{2}$.

Lời giải của Nam: Do $0 < x \le 1$ nên $\frac{1}{x} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x} \ge 2$.

Do đó: GTNN của $\frac{2}{x}$ là 2 khi $x = 1$.

Vậy GTNN của hàm số là $1 + 2 = 3$ khi $x = 1$.

Theo bạn đọc thì lời giải nào đúng, lời giải nào sai? Vì sao?

Bài 8: Cho x, y, z là các số dương.

a) Cho $x, y \ge 0$ và $x + y = 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$;

b) Cho x, y, z là các số dương và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$;

c) Cho x, y, z là các số dương và $x + y + z = 1$, hãy giá trị lớn nhất của $S = xyz(x + y)(y + z)(z + x)$.

Bài 9: a) Chứng minh: nếu $x^2 + y^2 = 1$ thì $|x + y| \le \sqrt{2}$;

b) Chứng minh: nếu $|x| < 1$; $|y| < 1$ thì $\left|\frac{x - y}{1 - xy}\right| < 1$;

c) Chứng minh rằng với mọi số thực a, b ta có: $-\frac{1}{2} \le \frac{(a + b)(1 - ab)}{(1 + a^2)(1 + b^2)} \le \frac{1}{2}$;

d) Cho a, b, c là các số thực thoả: $|ax^2 + bx + c| \le 1$ với $-1 \le x \le 1$.
Chứng minh: $|cx^2 + bx + a| \le 2$ với $-1 \le x \le 1$.

Bài 10: a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = |x + 10| + |2x + 5| + |3x - 1992|$

b) Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của $S = x + y$,
biết: $3x^2 + y^2 + 2xy - 7x - 4y + 5 = 0$.

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Cho f(x) và g(x) là 2 biểu thức của x. Ta gọi mệnh đề chứa biến dạng:

$f(x) < g(x)$ $(f(x) \le g(x))$ (1) *hoặc* $f(x) > g(x)$ $(f(x) \ge g(x))$

là bất phương trình một ẩn, x là ẩn số.

** Điều kiện có nghĩa (điều kiện) của bất phương trình là điều kiện của ẩn x để các biểu thức ở 2 vế của bất phương trình có nghĩa.*

** Số* x_0 *sao cho* $f(x_0) < g(x_0)$ $(f(x_0) \le g(x_0))$ *gọi là nghiệm của bất phương trình của (1). Giải 1 bất phương trình là tìm tập nghiệm của nó.*

2. Hai bất phương trình gọi là tương đương khi chúng có tập nghiệm bằng nhau.

** Định lí (về các phép biến đổi tương đương): Nếu giữ nguyên điều kiện có nghĩa (kí hiệu là A) của 1 bất phương trình và thực hiện trên nó các phép biến đổi sau thì ta được 1 bất phương trình tương đương:*

1) Biến đổi đồng nhất ở từng vế.

2) Cộng hay trừ vào 2 vế của bất phương trình cùng 1 biểu thức xác định với mọi x thoả mãn A.

3) Nhân hay chia 2 vế của bất phương trình với cùng 1 số dương hay với cùng 1 biểu thức luôn dương xác định với mọi x thoả mãn A.

4) Nhân hay chia 2 vế của bất phương trình với cùng 1 số âm hay với cùng 1 biểu thức luôn âm xác định với mọi x thoả mãn A và đổi chiều bất phương trình.

3. Bất phương dạng $ax + b < 0$ (*) *(hoặc* $ax + b \le 0$ *hoặc* $ax + b > 0$ *hoặc* $ax + b \ge 0$*), trong đó a, b là 2 số đã cho và* $a \ne 0$ *được gọi là bất phương trình bậc nhất 1 ẩn.*

** Nếu a > 0 thì tập nghiệm của (*) là* $(-\infty; -\frac{b}{a})$*; nếu a < 0 thì tập nghiệm của (*) là* $(-\frac{b}{a}; +\infty)$*...*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Tìm điều kiện có nghĩa của bất phương trình.***

Cần chú ý đến điều kiện có nghĩa của các biểu thức sau:

* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ có nghĩa khi $Q(x) \ne 0$;

* $\sqrt[2n]{P(x)}$ có nghĩa khi $P(x) \ge 0$ $(n \in \mathbf{N}^*)$.

Bài 1: *Tìm các giá trị của x thoả mãn điều kiện của mỗi bất phương trình:*

a) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2-4} < 2$; b) $3\sqrt{2x-5} < -x + \frac{x+3}{2x^2-7x+5}$.

Giải:

a) Điều kiện của bất phương trình là: $\begin{cases} x+1\neq 0 \\ x^2-4\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -1 \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$

b) Điều kiện của bất phương trình là:

$$\begin{cases} 2x-5\geq 0 \\ 2x^2-7x+5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{5}{2} \\ x\neq 1; x\neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Dạng 2: ***Các phép biến đổi bất phương trình.***

Bài 2: *Chứng tỏ các cặp bất phương trình sau tương đương:*

a) $3x - 2 > 0$ *và* $-3x + 2 < 0$;

b) $x^2 + 3x - 5 \leq 5x + 1$ *và* $x^2 - 2x - 6 \leq 0$;

c) $2x + 1 > 0$ *và* $2x + 1 + \frac{-3}{x^2+x+1} > \frac{-3}{x^2+x+1}$;

d) $x - 1 < 0$ *và* $(x^2 - 2x + 3)(x - 1) < 0$;

e) $(-x^2 - 1)(5 - x) \geq 0$ *và* $x - 5 \geq 0$.

Giải:

a) $3x - 2 > 0 \Leftrightarrow -1(3x - 2) < 0 \Leftrightarrow -3x + 2 < 0$.

b) $x^2 + 3x - 5 \leq 5x + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 3x - 5) - (5x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 6 \leq 0$.

c) Do $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ với mọi x nên $\frac{-3}{x^2+x+1}$ có nghĩa với mọi x.

Khi đó: $2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x + 1 + \frac{-3}{x^2+x+1} > \frac{-3}{x^2+x+1}$.

d) Do $x^2 - 2x + 3 = (x - 1)^2 + 2 \geq 2 > 0$ với mọi x nên:

$x - 1 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 3)(x - 1) < 0$.

e) Do $-x^2 - 1 = -(x^2 + 1) < 0$ với mọi x nên:

$(-x^2 - 1)(5 - x) \geq 0 \Leftrightarrow 5 - x \leq 0 \Leftrightarrow -1(5 - x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 5 \geq 0$.

Dạng 3: ***Giải bất phương trình và hệ bất phương trình.***

Phương pháp: * Giải bất phương trình bậc nhất 1 ẩn:

- Khai triển thu gọn về một trong các dạng của bất phương trình bậc nhất 1 ẩn.
- Sử dụng các phép biến đổi tương đương để giải bất phương trình.

* Để giải hệ bất phương trình ta giải lần lượt từng bất phương trình của hệ. Khi đó giao của các tập nghiệm trên là tập nghiệm của hệ bất phương trình.

Bài 3: *Giải các bất phương trình sau:*

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 \ge x + 3$;   *b)* $\frac{37-3x}{2} + 9 < \frac{2x+7}{4} - 2x$;

c) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6}$;   *d)* $(x-2)\sqrt{2x+3} \ge 0$.

Giải:

a) $\frac{x+2}{3} - x + 1 \ge x + 3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{3} - x + 1 - x - 3 \ge 0$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} - (2x+2) \ge 0 \Leftrightarrow \frac{x+2-3(2x+2)}{3} \ge 0 \Leftrightarrow -5x - 4 \ge 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{4}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -\frac{4}{5}]$.

b) $\frac{37-3x}{2} + 9 < \frac{2x+7}{4} - 2x \Leftrightarrow \frac{37-3x}{2} - \frac{2x+7}{4} + 2x + 9 < 0 \Leftrightarrow$

$\frac{2(37-3x) - (2x+7) + 4(2x+9)}{4} < 0 \Leftrightarrow 74 - 6x - 2x - 7 + 8x + 36 < 0$

$\Leftrightarrow 0x < -103$ (*)

Vì không có giá trị nào của x thoả (*) nên bất phương trình vô nghiệm.

c) $\frac{x+1}{2} - \frac{x+2}{3} < 2 + \frac{x}{6} \Leftrightarrow 3(x+1) - 2(x+2) < 12 + x$

$\Leftrightarrow 3x + 3 - 2x - 4 < 12 + x \Leftrightarrow x - 1 < 12 + x \Leftrightarrow 0x < 13$ (**)

Bất phương trình (**) nghiệm đúng với mọi x. Vậy bất phương trình có nghiệm mọi x.

d) Điều kiện: $2x + 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{3}{2}$. Do $\sqrt{2x+3} \ge 0$ với mọi $x \ge -\frac{3}{2}$ nên:

$$(x-2)\sqrt{2x+3} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x - 2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ \begin{cases} x > -\frac{3}{2} \\ x \ge 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{3}{2} \\ x \ge 2 \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\{-\frac{3}{2}\} \cup [2; +\infty)$.

Bài 4: *Giải các hệ bất phương trình sau:*

a) $\begin{cases} 2x + 1 > 5x - 5 \\ \frac{7x-3}{2} > -3x + 4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 12x + 5 \le 7x - \frac{3}{2} \\ 5(x+1) > \frac{4x-3}{2} \end{cases}$

Giải:

a) Ta có: $2x + 1 > 5x - 5 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow x < 2$; tập nghiệm $S_1 = (-\infty; 2)$.

$\frac{7x-3}{2} > -3x + 4 \Leftrightarrow 7x - 3 > 2(-3x + 4) \Leftrightarrow 7x - 3 > -6x + 8 \Leftrightarrow 13x > 11$

$\Leftrightarrow x > \frac{11}{13}$;

tập nghiệm $S_2 = (\frac{11}{13}; +\infty)$.

Khi đó: $S_1 \cap S_2 = (\frac{11}{13}; 2)$. Vậy tập nghiệm của hệ là: $(\frac{11}{13}; 2)$.

b) Ta có: $12x + 5 \leq 7x - \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2(12x + 5) \leq 14x - 3$

$\Leftrightarrow 24x + 10 \leq 14x - 3 \Leftrightarrow 10x \leq -13 \Leftrightarrow x \leq -\frac{13}{10}$;

tập nghiệm $S_1 = (-\infty; -\frac{13}{10}]$.

$5(x + 1) > \frac{4x-3}{2} \Leftrightarrow 10(x + 1) > 4x - 3 \Leftrightarrow 10x + 10 > 4x - 3$

$\Leftrightarrow 6x > -13 \Leftrightarrow x > -\frac{13}{6}$; tập nghiệm $S_2 = (-\frac{13}{6}; +\infty)$.

Khi đó: $S_1 \cap S_2 = (-\frac{13}{6}; -\frac{13}{10}]$. Vậy tập nghiệm của hệ là: $(-\frac{13}{6}; -\frac{13}{10}]$.

Dạng 4: ***Giải và biện luận bất phương trình.***

Phương pháp(giải và biện luận bất phương trình bậc nhất 1 ẩn):

- Khai triển thu gọn đưa về dạng bất phương trình bậc nhất 1 ẩn.
- Xét các trường hợp hệ số a = 0; a > 0; a < 0.

Bài 5: *Giải và biện luận các bất phương trình:*

a) $(m-2)x + 2m - 1 < 2 - 3x$; *b)* $m^2(x - 1) + 3 \geq x + 3m$;

c) $\frac{ax+b}{a-b} > \frac{ax-b}{a+b}$ $(a > 0, b > 0; a \neq \pm b)$.

Giải:

a) $(m-2)x + 2m - 1 < 2 - 3x \Leftrightarrow (m - 2)x + 2m - 1 - 2 + 3x < 0$

$\Leftrightarrow (m + 1)x + 2m - 3 < 0 \Leftrightarrow (m + 1)x < 3 - 2m$

- Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$: BPT trở thành $0x < 5 \Rightarrow$ BPT luôn thoả với mọi x.
- Nếu $m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$: BPT có nghiệm: $x < \frac{3-2m}{m+1}$.
- Nếu $m + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$: BPT có nghiệm: $x > \frac{3-2m}{m+1}$.

b) $m^2(x - 1) + 3 \geq x + 3m \Leftrightarrow m^2x - m^2 + 3 \geq x + 3m$

$\Leftrightarrow (m^2 - 1)x \geq m^2 + 3m - 3$

- Nếu $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1; m = 1$:
  + m = 1: BPT trở thành $0x \geq 1 \Rightarrow$ BPT vô nghiệm.

+ $m = -1$: BPT trở thành $0x \geq -5 \Rightarrow$ BPT luôn thoả với mọi x.

– Nếu $m^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |m| > 1$: BPT có nghiệm: $x \geq \dfrac{m^2 + 3m - 3}{m^2 - 1}$.

– Nếu $m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |m| < 1$: BPT có nghiệm: $x \leq \dfrac{m^2 + 3m - 3}{m^2 - 1}$.

c) $\dfrac{ax+b}{a-b} > \dfrac{ax-b}{a+b} \Leftrightarrow$

$$\frac{ax}{a-b} + \frac{b}{a-b} > \frac{ax}{a+b} - \frac{b}{a+b} \Leftrightarrow ax\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}\right) > -b\left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{abx}{a^2 - b^2} > -\frac{ab}{a^2 - b^2} \Leftrightarrow \frac{x}{a^2 - b^2} > -\frac{1}{a^2 - b^2}$$ (Vì ab > 0).

Ta thấy $\dfrac{1}{a^2 - b^2} \neq 0$:

– Nếu $\dfrac{1}{a^2 - b^2} > 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0 \Leftrightarrow a > b$ (Vì $a, b > 0$): BPT có nghiệm $x > -1$.

– Nếu $\dfrac{1}{a^2 - b^2} < 0 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0 \Leftrightarrow a < b$ (Vì $a, b > 0$): BPT có nghiệm $x < -1$.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Tìm các giá trị của x thoả mãn điều kiện của mỗi bất phương trình:

a) $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 7x + 10} + \dfrac{2}{x - 2} > 0$;

b) $\sqrt{2x - 3} - \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{5x - 4} \leq 0$;

c) $\dfrac{x + 1}{2} + \dfrac{2x - 5}{2x^2 - 13x + 20} \leq \dfrac{1}{x - 1} - \sqrt[3]{x + 1}$

d) $\dfrac{x^4 + 3x - 1}{x^3 - 5x^2 + 3x + 1} < \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{\sqrt{5x - 6}}$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $\dfrac{5x}{3} + \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{3} > \dfrac{3x - 5}{4}$;

b) $\dfrac{x - 3}{4} - \dfrac{3x - 1}{6} < 4x - 1$;

c) $\dfrac{4x + 7}{6} - \dfrac{6x - 3}{2} \geq x - 5$;

d) $\dfrac{5x - 8}{13} - x > 1 - 3x$;

e) $\dfrac{5x - 2}{12} - \dfrac{2x^2 + 1}{8} \leq \dfrac{x - 3}{6} + \dfrac{1 - x^2}{4}$;

f) $\dfrac{x}{x - 2} + \dfrac{x + 2}{x} > 2$;

g) $\dfrac{1}{2(x - 1)} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{15}{2(x + 1)} \geq 1$

h) $\dfrac{x + 2}{2005} + \dfrac{x + 1}{2006} > \dfrac{x - 1}{2008} + \dfrac{x - 2}{2009}$.

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

a) $(2x - 1)\sqrt{3x - 2} > 0$;

b) $(x + 3)\sqrt{(x - 2)(2x + 1)} \leq 0$;

c) $\left(\frac{2x-1}{3}-\frac{x+2}{4}\right)^{2007} \geq 0$; d) $\left(\frac{7x+2}{3}+\frac{2-8x}{4}\right)^{2009} < 0$.

Bài 4: Giải và biện luận các bất phương trình sau:

a) $mx+3 > 2x-m^2$; b) $m^2x-3 \geq x+3m$;

c) $5(m+1)x-2m < x-3m$; d) $3mx-x(m+1) < m-2x$;

e) $\frac{mx-3}{2}-\frac{2x+m}{4} > \frac{3x+4}{5}$; f) $\frac{x-m}{m-3}+x-3 \geq 0$;

g) $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-bc}{b+c}+\frac{x-ca}{c+a} < a+b+c$;

h) $\frac{x-a}{bc}+\frac{x-b}{ca}+\frac{x-c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

Bài 5: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} 4x+3 > 7x-5 \\ \frac{4x-3}{5} > -6x+4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{-x+3}{-2} > x-5 \\ \frac{2x+1}{5}-\frac{2}{3} \leq -x+1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{-x+3}{2}-\frac{3x+1}{3} < 7x-\frac{1}{2} \\ \frac{5x-6}{5}+\frac{2x+1}{2} \leq \frac{-3x}{4}+2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} \frac{x-5}{-2} \geq \frac{x}{4}-1 \\ \frac{4x+1}{7}-3x-2 \leq \frac{-2x+1}{3} \end{cases}$

Bài 6: Tìm m để các hệ bất phương trình sau có nghiệm:

a) $\begin{cases} 3x-1 < x+4 \\ (m-1)x+2 > 2x+3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2mx-1 < 2-x \\ mx+2 > x+3 \end{cases}$

Bài 7: Với giá trị nào của m thì:

a) Hệ bất phương trình $\begin{cases} x+m^2y \leq m \\ m^2x+y \leq m \end{cases}$ có nghiệm (x, y) mà x +y lớn nhất.

b) Các bất phương trình: $m(x-2)+4 \leq x$ và $m(x-1) \geq x-2$ có đúng một nghiệm chung.

§4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Nhị thức bậc nhất là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là 2 số đã cho, $a \neq 0$.

***2.** Định lí (về dấu của nhị thức bậc nhất): Nhị thức $f(x) = ax + b$ cùng dấu với hệ số a khi $x > -\frac{b}{a}$, trái dấu với hệ số a khi $x < -\frac{b}{a}$.*

Bảng xét dấu $f(x) = ax + b$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)= ax + b$		*trái dấu a*	0	*cùng dấu a*	

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Xét dấu nhị thức bậc nhất $f(x) = ax + b$.***

Phương pháp: − Tìm nghiệm của phương trình $ax + b = 0$ (tức là giá trị $-\frac{b}{a}$)

− Xác định dấu của hệ số a, rồi sử dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất để xét dấu.

Bài 1: *Xét dấu các nhị thức:*

a) $f(x) = 2x - 1$; *b) $f(x) = -5x - 3$;*

c) $f(x) = (m^2 + 2)x + 2m$.

Giải:

a) Ta có: $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$; hệ số $a = 2 > 0$. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)= 2x - 1$		$-$	0	$+$	

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$; $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; \frac{1}{2})$; $f(x) = 0$ khi $x = \frac{1}{2}$.

b) Ta có: $-5x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}$; hệ số $a = -5 < 0$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		$+\infty$
$f(x)= -5x - 3$		$+$	0	$-$	

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -\frac{3}{5})$; $f(x) < 0$ khi $x \in (-\frac{3}{5}; +\infty)$; $f(x) = 0$ khi $x = -\frac{3}{5}$.

c) Ta có: $(m^2 + 2)x + 2m = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2m}{m^2+2}$ (vì $m^2 + 2 \neq 0$ với mọi m);
hệ số $a = m^2 + 2 > 0$ với mọi m. Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{2m}{m^2+2}$		$+\infty$
$f(x) = (m^2 + 2)x + 2m$		$-$	0	$+$	

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\frac{2m}{m^2+2}; +\infty)$; $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -\frac{2m}{m^2+2})$;

$f(x) = 0$ khi $x = -\frac{2m}{m^2+2}$.

Dạng 2: ***Xét dấu một tích, thương những nhị thức bậc nhất.***

Phương pháp: Ta lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất trong tích (thương) đó, từ đó suy ra dấu của tích (thương).
Chú ý: Sau khi tìm được các nghiệm của các nhị thức ta cần sắp xếp chúng theo thứ tự từ nhỏ đến lớn để điền vào bảng xét dấu chung.

Bài 2: *Xét dấu các biểu thức:*

a) $f(x) = (3x + 1)(4 - 2x)$; *b)* $f(x) = \frac{4x-3}{5x+6}$; *c)* $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{3x+12}$;

Giải:

a) Các nhị thức $3x + 1$; $4 - 2x$ có các nghiệm là $-\frac{1}{3}$; 2.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$3x + 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$4 - 2x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\frac{1}{3}; 2)$;

$f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -\frac{1}{3})$ hoặc $(2; +\infty)$;

$f(x) = 0$ khi $x = -\frac{1}{3}$ hoặc $x = 2$.

b) Các nhị thức $4x - 3$; $5x + 6$ có các nghiệm là $\frac{3}{4}$; $-\frac{6}{5}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{6}{5}$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x - 3$		$-$	0	$-$	|	$+$	
$5x + 6$		$-$	|	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (-\infty; -\frac{6}{5})$ hoặc $(\frac{3}{4}; +\infty)$; $f(x) < 0$ khi $x \in (-\frac{6}{5}; \frac{3}{4})$;

$f(x) = 0$ khi $x = -\frac{6}{5}$ hoặc $x = \frac{3}{4}$.

c) Ta có: $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{3x + 12} = \frac{(2x - 3)(x + 1)}{3x + 12}$.

Các nhị thức $2x - 3$; $x + 1$; $3x + 12$ có các nghiệm là $\frac{3}{2}$; -1; -3.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x + 1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x + 12$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy: $f(x) > 0$ khi $x \in (-3; -1)$ hoặc $(\frac{3}{2}; +\infty)$; $f(x) < 0$ khi $x \in (-\infty; -3)$

hoặc $(-1; \frac{3}{2})$;

$f(x) = 0$ khi $x = -1$ hoặc $x = \frac{3}{2}$; $f(x)$ không xác định khi $x = -3$.

Bài 3: *Giải các bất phương trình:*

a) $(3x - 1)^2 > (4x + 7)^2$;

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x + 4} \leq \frac{3}{x + 3}$

Giải:

a) $(3x - 1)^2 > (4x + 7)^2 \Leftrightarrow (3x - 1)^2 - (4x + 7)^2 > 0$

$\Leftrightarrow (3x - 1 - 4x - 7)(3x - 1 + 4x + 7) > 0 \Leftrightarrow (-x - 8)(7x + 6) > 0$.

Ta xét dấu $f(x) = (-x - 8)(7x + 6)$:

Các nhị thức $7x + 6$; $-x - 8$ có các nghiệm là ; -8; $-\frac{6}{7}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-8		$-\frac{6}{7}$		$+\infty$
$-x - 8$		$+$	0	$-$		$-$	
$7x + 6$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-8 < x < -\frac{6}{7}$.

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x + 4} \leq \frac{3}{x + 3}$. ĐK: $x \neq 0$; $x \neq -3$; $x \neq -4$.

Ta có: $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} \le \frac{3}{x+3} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} - \frac{3}{x+3} \le 0$

$\Leftrightarrow \frac{(x+4)(x+3) + 2x(x+3) - 3x(x+4)}{x(x+3)(x+4)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)} \le 0.$

Ta xét dấu $f(x) = \frac{x+12}{x(x+3)(x+4)}$.

Các nhị thức x + 12; x; x + 3; x + 4 có các nghiệm là −12; 0; −3; −4.

Bảng xét dấu:

x	−∞		−12		−4		−3		0		+∞
x + 12		−	0	+		+		+		+	
x		−		−		−		−	0	+	
x + 3		−		−		−	0	+		+	
x + 4		−		−	0	+		+		+	
f(x)		+	0	−	‖	+	‖	−	‖	+	

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-12 \le x < 4$ hoặc $-3 < x < 0$.

Nhận xét: Khi giải các bất phương trình mà ta có thể biến đổi được bất phương trình đó thành dạng $f(x) > 0$ ($f(x) < 0, \ldots$) trong đó f(x) là tích (thương) của các nhị thức bậc nhất thì ta sẽ xét dấu f(x) rồi dựa vào bảng xét dấu để tìm tập nghiệm của bất phương trình.

Dạng 3: ***Bất phương trình có chứa dấu giá trị tuyệt đối.***

Phương pháp: * Ta có các dạng bất phương trình sau:

- Dạng 1: $|ax + b| < k$ (hay $|ax + b| \le k$)
  + Nếu $k < 0$ thì BPT vô nghiệm.
  + Nếu $k \ge 0$ thì $|ax + b| < k$ (hay $|ax + b| \le k$) $\Leftrightarrow -k < ax + b < k$ (hay $-k \le ax + b \le k$)
- Dạng 2: $|ax + b| > k$ (hay $|ax + b| \ge k$)
  + Nếu $k < 0$ thì BPT có nghiệm với mọi x.
  + Nếu $k \ge 0$ thì $|ax + b| > k$ (hay $|ax + b| \ge k$) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ax+b > k \\ ax+b < -k \end{array}\right.$

(hay $\left\{\begin{array}{l} ax+b \ge k \\ ax+b \le -k \end{array}\right.$).

* Nếu bất phương trình có chứa nhiều dấu giá trị tuyệt đối thì ta chia các khoảng để khử dấu giá trị tuyệt đối.

Bài 1: *Giải các bất phương trình:*

a) $|3x + 2| < 3$; b) $|6 - 4x| \ge 2$

c) $|x| + |3 - x| > 4 + |2x + 2|$.

Giải:

a) Ta có: $|3x+2| < 3 \Leftrightarrow -3 < 3x + 2 < 3 \Leftrightarrow -5 < 3x < 1 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{3}$.

b) Ta có: $|6 - 4x| \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6 - 4x \geq 2 \\ 6 - 4x \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4x \geq -4 \\ -4x \leq -8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 2 \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x \leq 1$ hoặc $x \geq 2$.

c) $|x| + |3 - x| > 4 + |2x + 2| \Leftrightarrow |x| + |3 - x| - |2x + 2| - 4 > 0$ (*)

Ta sẽ khử dấu giá trị tuyệt đối trong biểu thức

$f(x) = |x| + |3 - x| - |2x + 2| - 4$

Các nhị thức x; $3 - x$; $2x + 2$ có các nghiệm là 0; 3; −1.

Ta có:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$		$-x$	0	x		x	
$\lvert 3-x\rvert$		$3-x$		$3-x$		$3-x$	0	$x-3$	
$\lvert 2x+2\rvert$		$-2x-2$	0	$2x+2$		$2x+2$		$2x+2$	
$f(x)$		1		$-4x-3$		$-2x-3$		-9	

Do đó: (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -\infty < x < -1 \\ 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ -4x - 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 3 \\ -2x - 3 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3 \leq x < +\infty \\ -9 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty < x < -1 \\ \begin{cases} -1 \leq x < 0 \\ x < -\frac{3}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \leq x < 3 \\ x < -\frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -\infty < x < -\frac{3}{4}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-\infty < x < -\frac{3}{4}$.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $A = 3x - 2$; b) $B = (4 - 2x)(5x + 3)$;

c) $C = \frac{(x+2)(2x-1)}{3x+2}$; d) $D = (4x - 7)^2 - (6x - 1)^2$;

e) $E = \frac{-3}{2x+5} + \frac{1}{x-1}$; f) $F = 2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $(3x - 5)(x - 2) < 0$; b) $x^2 - 8 + 2(x - 2)^2 \leq 0$;

c) $(3x+1)^2 > (2-5x)^2$; d) $4 + \frac{(x-3)^2}{5} \geq (x-1)^2$;

e) $\frac{x+1}{3x+12} < 1$; f) $\frac{(3x-5)x}{(x+2)(x^2+7)} \leq 0$;

g) $\frac{2x-5}{6x+3} > \frac{6x+3}{2x-5}$; h) $\frac{3x-5}{x+4} - \frac{3(x-1)}{3-x} \geq \frac{5}{(x+4)(3-x)}$.

Bài 3: Giải và biện luận các bất phương trình sau:

a) $(2x-m)(x+6) > 0$; b) $\frac{3x-4}{x+m} < 0$;

c) $(3mx-2)(4x+2) \leq 0$; d) $\frac{(3x+m)(x-5)}{x+7} \geq 0$.

Bài 4: Tìm giá trị của m để:

a) Phương trình $\frac{2}{x+1} = 4-m$ có nghiệm dương;

b) Phương trình $\frac{4x-1}{x-1} = m+3$ có nghiệm âm;

c) Phương trình $\frac{m(x+2)-3(m-1)}{x+1} = 1$ có nghiệm âm.

Bài 5: Giải các bất phương trình sau:

a) $|x-3| < 2$; b) $2|x| + |x-1| \leq 5$;

c) $|x-|x-1|| \geq 3$; d) $|x+3| + |5-x| > 3x$;

e) $\left|\frac{3}{2x-1}\right| > \left|\frac{-6}{x+3}\right|$; f) $\left|\frac{x-2}{3x+1}\right| \leq 3$;

g) $\sqrt{x(x-2)+2(3x+2)} + |1-x| > 2$; h) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} < 5$.

Bài 6: Chứng minh rằng: $-3 \leq \frac{x}{|x|} + \frac{|x+1|}{x+1} + \frac{x+2}{|x+2|} \leq 3$ với mọi x thuộc tập xác định.

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y là mệnh đề chứa 2 biến dạng:

$$ax + by \le c \ (*)$$

$$(ax + by < c,\ ax + by \ge c,\ ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là các số đã cho, a và b không đồng thời bằng 0.

Cặp số (x_0, y_0) sao cho $ax_0 + by_0 \le c$ là nghiệm của (*). Giải bất phương trình (*) là tìm tập các nghiệm của nó.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***Giải bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.***

Phương pháp: Sử dụng qui tắc thực hành sau:

- Vẽ đường thẳng ax + by = c (d) (Bạn đọc cần xem lại cách vẽ đường thẳng này);
- Lấy một điểm $M_0(x_0; y_0) \notin$ (d);
- Tính $ax_0 + by_0$ và so sánh $ax_0 + by_0$ với c:

+ Nếu (x_0, y_0) thoả mãn bất phương trình cần giải thì:

Nửa mặt phẳng bờ (d) chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình (nếu bất phương trình có dạng $ax + by \le c$ hoặc $ax + by \ge c$).

Nửa mặt phẳng bờ (d) chứa M_0, bỏ đi đường thẳng d là miền nghiệm của bất phương trình (nếu bất phương trình có dạng $ax + by < c$ hoặc $ax + by > c$).

+ Nếu (x_0, y_0) không thoả mãn bất phương trình cần giải thì:

Nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình (nếu bất phương trình có dạng $ax + by \le c$ hoặc $ax + by \ge c$).

Nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa M_0, bỏ đi đường thẳng d là miền nghiệm của bất phương trình (nếu bất phương trình có dạng $ax + by < c$ hoặc $ax + by > c$).

Bài 1: *Giải các bất phương trình:*

a) $3x - 2y \le 4$; *b) $5x + y > -3$.*

Giải:

a) − Vẽ đường thẳng 3x − 2y = 4 (d) hay là đồ thị hàm số: $y = \frac{3}{2}x - 2$.

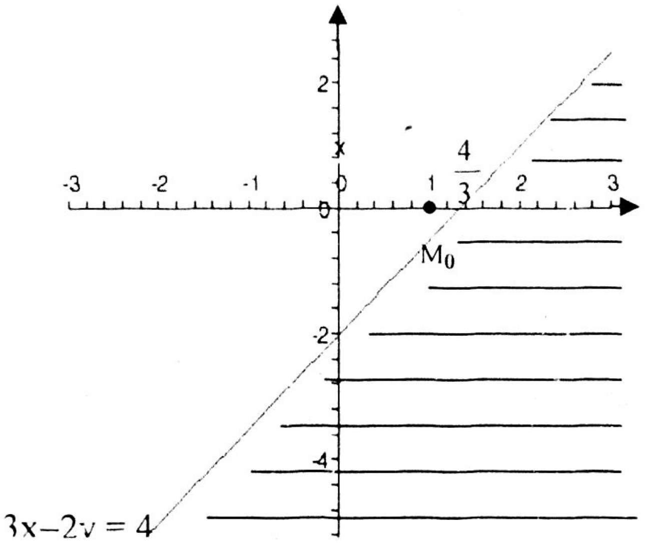
Đường thẳng cắt các trục toạ độ tại các điểm (0; −2), $(\frac{4}{3}; 0)$.

− Ta thấy: $M_0(1; 0) \notin$ đường thẳng 3x − 2y = 4 và $3.1 - 2.0 = 3 \le 4$ (thoả mãn bất phương trình).

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng 3x − 2y = 4 (miền không bị gạch) trong hình bên.

b) − Vẽ đường thẳng 5x + y = −3 hay là đồ thị hàm số: y = −5x − 3.

Đường thẳng cắt các trục toạ độ tại các điểm (0; −3), $(-\frac{3}{5}; 0)$.

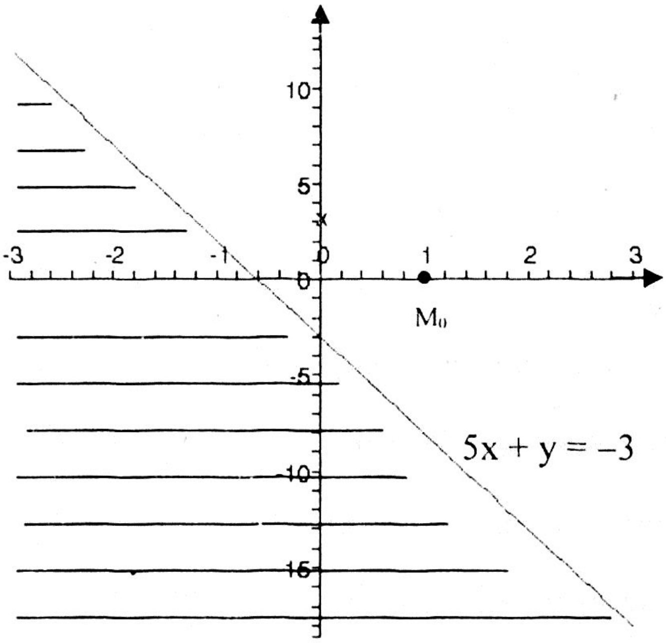


– Ta thấy: $M_0(1;\ 0) \notin (d)$ và $3.1 - 2.0 = 3 \le 4$ (thoả mãn bất phương trình).

Vậy miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $5x + y = -3$ (miền không bị gạch) trong hình bên, bỏ đi đường thẳng đó.

Chú ý: Ta cũng có thể xác định miền nghiệm của 1 bất phương trình như sau:

– Biến đổi đưa bất phương trình về các dạng $y \le ax + b$ ($y < ax + b$, $y \ge ax + b$, $y > ax + b$).



– Nếu bất phương trình có dạng $y \le ax + b$ ($y < ax + b$) thì miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $y = ax + b$ (bỏ đi đường thẳng $y = ax + b$) và nằm phía "dưới" của đường thẳng đó.

Nếu bất phương trình có dạng $y \ge ax + b$ ($y > ax + b$) thì miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng $y = ax + b$ (bỏ đi đường thẳng $y = ax + b$) và nằm phía "trên" của đường thẳng đó.

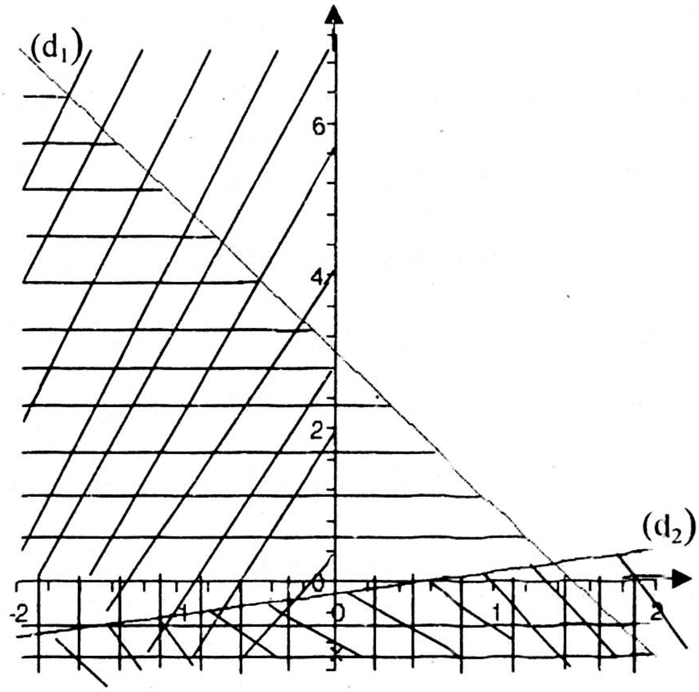
Dạng 2: ***Giải (xác định miền nghiệm) của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.***

Phương pháp: Để giải (xác định miền nghiệm) của hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn , ta xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình thuộc hệ (cách làm như trên), giao của các miền nghiệm đó là miền nghiệm của hệ bất phương trình.

Bài 1: *Giải (xác định miền nghiệm) của hệ bất phương trình.*

$$a)\ \begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ 2x - 7y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} x - 2y < 0 \\ x + 3y < -2 \\ y - x < 3 \end{cases}$$



Giải: a) Vẽ các đường thẳng:

(d_1): $2x + y = 3$;

(d_2): $2x - 7y = 1$;

(d_3): $x = 0$ (trục tung);

(d_4): $y = 0$ (trục hoành).

trên cùng một hệ trục toạ độ (Hình bên).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch trọng hình bên.

b) Vẽ các đường thẳng:

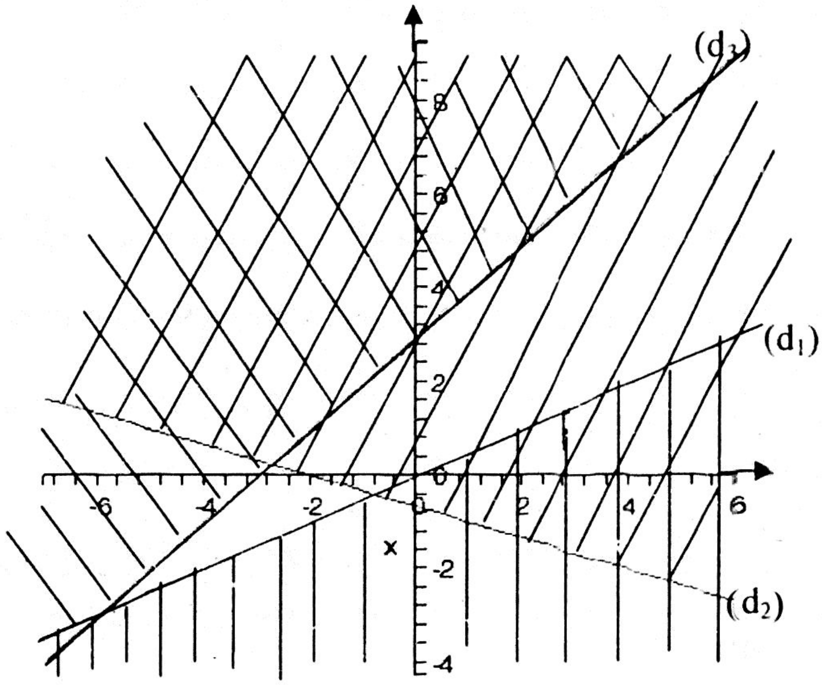
(d_1): $x - 2y = 0$;

(d_2): $x + 3y = -2$;

(d_3): $y - x = 3$.

trên cùng một hệ trục toạ độ (hình bên).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch chéo, bỏ đi các đường thẳng (phần trong của hình tam giác) ở hình bên.



Chú ý: Khi gạch bỏ các phần không thuộc miền nghiệm của từng bất phương trình ta nên dùng các gạch theo các chiều khác nhau để dễ phân biệt.

Dạng 3: *Áp dụng vào bài toán kinh tế.*

Phương pháp:

- Dựa vào giả thiết của bài toán để lập hệ bất phương trình bậc nhất 2 ẩn.
- Tìm miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.
- Tìm giá trị của các ẩn thoả mãn yêu cầu bài toán.

Chú ý: Bài toán thường gặp ở đây là tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của một biểu thức chứa 2 ẩn mà giá trị của 2 ẩn đó được lấy trong miền nghiệm của hệ bất phương trình mà ta vừa lập (thường là một đa giác).

Người ta chứng minh được rằng biểu thức 2 ẩn đó sẽ đạt giá trị lớn nhất (giá trị nhỏ nhất) tại một trong các đỉnh của đa giác trên.

Vì vậy khi tìm được đa giác nghiệm của hệ ta cần tìm toạ độ các đỉnh của nó và tính giá trị của biểu thức tại các đỉnh đó để tìm điểm thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1: *Một xí nghiệp sản xuất 2 loại sản phẩm. Mỗi sản phẩm loại 1 cần 0,1kg nguyên liệu và 0,2 giờ để làm, đem lại mức lãi là 4000đ. Mỗi sản phẩm loại 2 cần 0,2kg nguyên liệu và 0,1 giờ để làm, đem lại mức lãi là 3000đ. Nếu với lượng nguyên liệu là 1kg và thời gian làm việc là 1,4 giờ thì phải sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để thu được tổng số tiền lãi cao nhất?*

Giải:

Gọi x là số sản phẩm loại 1 ($x \geq 0$);

y là số sản phẩm loại 2 ($y \geq 0$).

Khi đó: Tổng số tiền lãi là: $F = 4000x + 3000y$;

Lượng nguyên liệu sử dụng là: $0,1x + 0,2y$;

Thời gian làm việc là: $0,2x + 0,1y$.

Theo điều kiện bài toán thì x, y phải thoả mãn hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 0,1x + 0,2y \leq 1 \\ 0,2x + 0,1y \leq 1,4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 10 \\ 2x + y \leq 14 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành: Tìm GTLN của F với x, y thoả hệ trên.

Giải hệ bất phương trình trên, ta có miền nghiệm là 1 tứ giác (hình bên) có các đỉnh là:

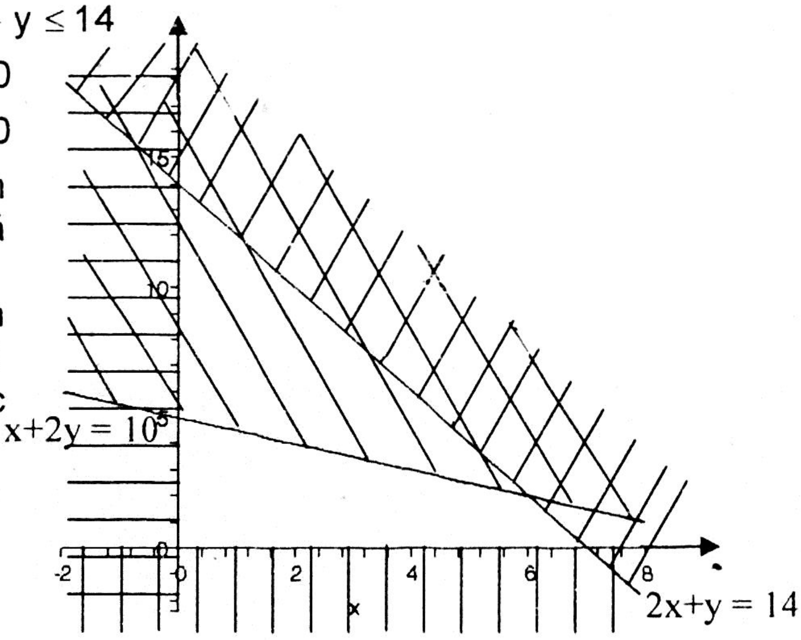
(0; 0), (0; 5), (7; 0), (6; 2).

Khi đó: Tại (0; 0): F = 0;

Tại (0; 5): F = 15000;

Tại (7; 0): F = 28000;

Tại (6; 2): F = 30000;



Vậy để có tổng số tiền lãi lớn nhất thì phải sản xuất 6 sản phẩm loại 1 và 2 sản phẩm loại 2.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x - 5y < 2$; b) $-x + 4y \le -1$;

c) $2(x + 1) - 5x > 2(y + 3) - 2$; d) $4 - 2(x - 2) + 3(5 - 2y) \ge -3(x - 5)$.

Bài 2: Giải (biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ miền nghiệm) các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} x - y > 0 \\ x - 3y < -3 \\ x + y > 5 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 2x - 5y > 1 \\ 2x + 3y > -4 \\ y < 2 \end{cases}$.

Bài 3: Cho hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 6x + 7y \le 84 \\ 2x + 3y \le 24 \\ 4x + 3y \le 36 \\ 0 \le x \le 6 \\ 0 \le y \le 7 \end{cases}$$

a) Giải hệ bất phương trình trên(biểu diễn trên mặt phẳng toạ độ miền nghiệm).

b) Tìm các điểm trong miền nghiệm trên làm cho biểu thức $F = 2x + 3y$ có giá trị lớn nhất.

c) Tìm các điểm trong miền nghiệm trên làm cho biểu thức $F = x + 2y$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 4: Một xí nghiệp sản xuất ra hai loại sản phẩm A và B. Những sản phẩm này được tạo ra từ 3 loại nguyên liệu I, II và III. Dự trữ từng loại nguyên liệu và số lượng đơn vị từng loại nguyên liệu dùng để sản xuất ra 1 sản phẩm được cho bởi bảng sau:

Loại nguyên liệu	*Dự trữ*	*Số lượng đơn vị nguyên liệu để sản xuất 1 sản phẩm*	
		A	B
I	8	2	1
II	24	0	6
III	12	4	0

Hãy lập kế hoạch sản xuất để tổng số tiền lãi cao nhất, biết mỗi sản phẩm loại A có lãi 3000đ và mỗi sản phẩm loại B có lãi 5000đ.

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Tam thức bậc hai là biểu thức dạng: $f(x) = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là các số đã cho, $a \neq 0$.*

2. *Bảng xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$:*

Dấu của $\Delta = b^2 - 4ac$	Dấu của f(x)
$\Delta < 0$	*f(x) cùng dấu với a với mọi x.*
$\Delta = 0$ *f(x) có nghiệm kép* $x = -\dfrac{b}{2a}$	*f(x) cùng dấu với a với mọi* $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.
$\Delta > 0$ *f(x) có hai nghiệm* $x_1 < x_2$	*f(x) cùng dấu với a với mọi x:* $x < x_1$ *hoặc* $x > x_2$; *f(x) trái dấu với a với mọi x:* $x_1 < x < x_2$.

3. *Bất phương trình bậc hai một ẩn là bất phương trình dạng $ax^2 + bx + c < 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \leq 0$, hoặc $ax^2 + bx + c > 0$, hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$), trong đó a, b, c là các số đã cho, $a \neq 0$; x là ẩn số.*

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: *Xét dấu tam thức bậc hai.*

Phương pháp:

– Tính biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ (hoặc $\Delta' = b'^2 - ac$; $b' = \dfrac{b}{2}$);

– Xác định dấu của Δ (hoặc Δ') và dấu của hệ số a.

Nếu $\Delta \geq 0$ (hoặc $\Delta' \geq 0$) thì tìm các nghiệm của tam thức bậc hai.

– Sử dụng bảng xét dấu tam thức bậc hai để xét dấu.

Bài 1: *Xét dấu các biểu thức:*

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$; b) $f(x) = -3x^2 + 6x - 3$;

c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$; d) $f(x) = x(2 - x) + 6 - 7x$;

e) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 - 2mx + 1$; f) $f(x) = (-m^2 - 2)x^2 + (m + 1)x - 1$.

Giải:

a) $\Delta = 5^2 - 4.2.4 = 25 - 32 = -7 < 0$; $a = 2 > 0$;

Vậy $f(x) > 0$ với mọi x.

b) $\Delta' = 3^2 - (-3).(-3) = 9 - 9 = 0$;

$f(x) = 0$ khi $x = 1$;

$a = -3 < 0$;

Vậy $f(x) < 0$ với mọi $x \neq 1$.

c) $\Delta' = (-2)^2 - 1.3 = 1 > 0$;

$f(x) = 0$ khi $x = 1$; $x = 3$;

$a = 1 > 0$;

Vậy $f(x) > 0$ khi $x < 1$ hoặc $x > 3$;

$f(x) < 0$ khi $1 < x < 3$.

d) $f(x) = x(2 - x) + 6 - 7x = 2x - x^2 + 6 - 7x = -x^2 - 5x + 6$.

$\Delta = (-5)^2 - 4.(-1).6 = 25 - 24 = 1 > 0$;

$f(x) = 0$ khi $x = -6$; $x = 1$;

$a = -1 < 0$;

Vậy $f(x) > 0$ khi $-6 < x < 1$;

$f(x) < 0$ khi $x < -6$ hoặc $x > 1$.

e) $\Delta' = (-m)^2 - (m^2 + 1).1 = m^2 - m^2 - 1 = -1 < 0$;

$a = m^2 + 1 > 0$ với mọi m;

Vậy $f(x) > 0$ với mọi x.

f) $\Delta = (m + 1)^2 - 4(-m^2 - 2).(-1) = m^2 + 2m + 1 - 4m^2 - 8 = -3m^2 + 2m - 7$;

Đặt $g(m) = -3m^2 + 2m - 7$. Ta xét dấu g(m), ta có:

$$\Delta'_m = 1^2 - (-3).(-7) = -20 < 0.$$

Do đó $g(m) < 0$ với mọi m hay $\Delta < 0$ với mọi m.

$a = -m^2 - 2 < 0$ với mọi m;

Vậy $f(x) < 0$ với mọi x.

Chú ý: Nếu các hệ số của tam thức bậc hai có chứa các tham số thì ta thường phải xét dấu của Δ (hoặc Δ') và hệ số a theo các tham số đó (xem bài e và f ở trên).

Dạng 2: ***Giải bất phương trình bậc hai 1 ẩn - Giải hệ bất phương trình bậc hai 1 ẩn.***

Phương pháp: * Giải bất phương trình bậc hai 1 ẩn:

– Xét dấu của tam thức bậc hai ở vế trái (không cần nêu các kết luận).

– Xét yêu cầu đòi hỏi (dấu bất đẳng thức) của bất phương trình và dấu của hệ số a (bài toán yêu cầu vế trái của bất phương trình cùng dấu hay khác dấu với hệ số a) rồi dựa vào kết quả xét dấu trên mà tìm nghiệm của bất phương trình.

* Giải hệ bất phương trình bậc hai 1 ẩn: Ta giải lần lượt các bất phương trình trong hệ để tìm tập nghiệm của từng bất phương trình đó, giao của các tập nghiệm trên là nghiệm của hệ.

Bài 2: *Giải các bất phương trình:*

a) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;

b) $-x^2 + 7x - 6 \geq 0$;

c) $-8x^2 + 12\sqrt{2}\,x - 9 \geq 0$;

d) $-2(m^4 + 1)x^2 - 3m^2x - 2 < 0$;

e) $(m^2 - 2m + 8)x^2 - 2(m - 1)x - 1 \leq 0$.

Giải:

a) $\Delta = 3^2 - 4.2.(-2) = 9 + 16 = 25 > 0$;

$2x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$; $x = \dfrac{1}{2}$;

$a = 2 > 0$;

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < -2$ hoặc $x > \dfrac{1}{2}$.

b) $\Delta = 7^2 - 4(-1)(-6) = 49 - 24 = 25 > 0$;

$-x^2 + 7x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 6;$

$a = -1 < 0;$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $1 \le x \le 6$.

c) $\Delta' = (6\sqrt{2})^2 - (-8).(-9) = 72 - 72 = 0;$

$- 8x^2 + 12\sqrt{2}x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4};$

$a = -8 < 0;$

Do đó $f(x) = - 8x^2 + 12\sqrt{2}x - 9 < 0$ với mọi $x \neq \dfrac{3\sqrt{2}}{4};$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

d) $\Delta = (-3m^2)^2 - 4.[-2(m^4 + 1)](-2) = 9m^4 - 16m^4 - 16 = -7m^4 - 16 < 0$ với mọi m;

$a = -2(m^4 + 1) < 0$ với mọi m;

Do đó $f(x) = -2(m^4 + 1)x^2 - 3m^2x - 2 < 0$ với mọi x;

Vậy bất phương trình thỏa với mọi x.

e) $\Delta' = (m - 1)^2 - (m^2 - 2m + 8).(-1)$

$= m^2 - 2m + 1 + m^2 - 2m + 8 = 2m^2 + 9 > 0$ với mọi m;

$(m^2 - 2m + 8)x^2 - 2(m - 1)x - 1 = 0 \Leftrightarrow \quad x_1 = m - 1 - \sqrt{2m^2 + 9};$

$x_2 = m - 1 + \sqrt{2m^2 + 9}$

và ta luôn có: $m - 1 - \sqrt{2m^2 + 9} < m - 1 + \sqrt{2m^2 + 9};$

$a = m^2 - 2m + 8 = (m - 1)^2 + 7 > 0$ với mọi m;

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $m - 1 - \sqrt{2m^2 + 9} \le x \le m - 1 + \sqrt{2m^2 + 9}$.

Bài 3: *Giải các bất phương trình:*

a) $(x^2 - 8x + 15)(x^2 - 3x - 4) \ge 0;$ b) $\dfrac{6x + 4}{3(2 - x)} < \dfrac{-x}{2x + 1}$.

Giải:

a) Ta lập bảng xét dấu chung cho 2 tam thức $x^2 - 8x + 15$ và $x^2 - 3x - 4$:

Ta có: $x^2 - 8x + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 3; x = 5;$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = 4;$

Đặt $f(x) = (x^2 - 8x + 15)(x^2 - 3x - 4)$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		3		4		5		$+\infty$
$x^2 - 8x + 15$		+		+	0	−		−	0	+	
$x^2 - 3x - 4$		+	0	−		−	0	+		+	
f(x)		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \le -1$ hoặc $3 \le x \le 4$ hoặc $x \ge 5$.

b) Ta có:

$$\frac{6x + 4}{3(2 - x)} < \frac{-x}{2x + 1} \Leftrightarrow \frac{6x + 4}{3(2 - x)} - \frac{-x}{2x + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(6x + 4)(2x + 1) + 3x(2 - x)}{3(2 - x)(2x + 1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{12x^2 + 14x + 4 + 6x - 3x^2}{3(-2x^2 + 3x + 2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{9x^2 + 20x + 4}{3(-2x^2 + 3x + 2)} < 0.$$

Ta lập bảng xét dấu chung cho 2 tam thức $9x^2 + 20x + 4$ và $-2x^2 + 3x + 4$:

Ta có: $9x^2 + 20x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2;\ x = -\frac{2}{9};$

$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2};\ x = 2;$

Đặt $f(x) = \dfrac{9x^2 + 20x + 4}{3(-2x^2 + 3x + 2)}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{2}{9}$		2		$+\infty$
$9x^2+20x+4$		+	0	−		−	0	+		+	
$-2x^2\ 3x+4$		−		−	0	+		+	0	−	
$f(x)$		−	0	+	‖	−	0	+	‖	−	

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < -2$ hoặc $-\frac{1}{2} < x < -\frac{2}{9}$ hoặc $x > 2$.

Bài 4: *Giải các hệ bất phương trình:*

a) $\begin{cases} 2x^2 - 13x + 18 > 0 \\ 3x^2 - 20x - 7 < 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \le 0 \\ 2x^2 - 5x + 3 < 0 \end{cases}$

Giải:

a) * Giải bất phương trình $2x^2 - 13x + 18 > 0$ (1):

$\Delta = (-13)^2 - 4.2.18 = 25;$

$2x^2 - 13x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 2;\ x = \frac{9}{2};$

$a = 2 > 0;$

Vậy nghiệm của (1) là: $x < 2$ hoặc $x > \frac{9}{2}$.

* Giải bất phương trình $3x^2 - 20x - 7 < 0$ (2):

$\Delta' = (-10)^2 - 3.(-7) = 121;$

$3x^2 - 20x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3};\ x = 7;$

$a = 3 > 0;$

Vậy nghiệm của (2) là: $-\frac{1}{3} < x < 7$.

Lấy giao hai tập nghiệm của (1) và (2) ta có nghiệm của hệ là: $-\frac{1}{3} < x < 2$ hoặc $\frac{9}{2} < x < 7$.

b) * Giải bất phương trình $x^2 - 3x + 2 \le 0$, ta có nghiệm là: $1 \le x \le 2$.

* Giải bất phương trình $2x^2 - 5x + 3 < 0$, ta có nghiệm là: $1 < x < \frac{3}{2}$.

(Bạn đọc hãy thực hiện việc giải các bất phương trình này).

Vậy nghiệm của hệ là: $1 < x < \frac{3}{2}$.

Dạng 3: ***Tìm giá trị của tham số để bất phương trình bậc hai 1 ẩn đúng với mọi x.***

Tìm giá trị của tham số để bất phương trình bậc hai 1 ẩn vô nghiệm.

Phương pháp: Cho tam thức bậc hai: $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \ne 0)$.
Ta có:

* $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$, với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0$, với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$, với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0$, với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a > 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a > 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c \le 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c > 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \le 0 \\ a < 0 \end{cases}$

* $f(x) = ax^2 + bx + c \ge 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$

Bài 4: *Với giá trị nào của tham số m, các bất phương trình sau đúng với mọi x:*

a) $-x^2 + (2m - 1)x + 3 < 0$; *b)* $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \ge 0$.

Giải:

a) Ta có: $-x^2 + (2m - 1)x - 3 < 0$, với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (2m-1)^2 - 12 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4m - 11 < 0 \\ a = -1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1-2\sqrt{3}}{2} < m < \dfrac{1+2\sqrt{3}}{2} \\ a = -1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-2\sqrt{3}}{2} < m < \frac{1+2\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy để $-x^2 + (2m - 1)x - 3 < 0$, với mọi x thì $\frac{1-2\sqrt{3}}{2} < m < \frac{1+2\sqrt{3}}{2}$.

b) * Nếu $a = m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$ thì bất phương trình trở thành:

$4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2}$ (không thoả với mọi x)

* Nếu $a = m + 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq -1$ thì:
$(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0$, với mọi x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m-1)^2 - (m+1)(3m-3) \leq 0 \\ a = m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -2m^2 - 2m + 4 \leq 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq 1 \end{array}\right. \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

Vậy để $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \geq 0$, với mọi x thì $m \geq 1$.

Chú ý: Khi hệ số a có chứa tham số ta phải xét 2 trường hợp: a = 0 và $a \neq 0$ (như bài b).

Bài 5: *Với giá trị nào của tham số m, các bất phương trình sau vô nghiệm:*
a) $(2m + 3)x^2 - 6mx + 4 > 0$; *b)* $(1-4m)x^2 + 3(m+2)x - m \leq 0$.

Giải:

a) * Nếu $a = 2m + 3 = 0 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$ thì bất phương trình trở thành:

$9x + 4 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{4}{9}$ (loại).

* Nếu $a = 2m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -\frac{3}{2}$ thì:

$(2m + 3)x^2 - 6mx + 4 > 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (-3m)^2 - 4(2m+3) < 0 \\ a = 2m + 3 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 8m - 12 < 0 \\ m < -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4-2\sqrt{31}}{9} < m < \dfrac{4+2\sqrt{31}}{9} \\ m < -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{vò nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị nào của m để bất phương trình $(2m + 3)x^2 - 6mx + 4 > 0$ vô nghiệm.

b) * Nếu $a = 1 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$ thì bất phương trình trở thành:

$\frac{27}{4}x - \frac{1}{4} \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{27}$ (loại).

* Nếu $a = 1 - 4m \ne 0 \Rightarrow m \ne \frac{1}{4}$ thì:

$$(1-4m)x^2 + 3(m+2)x - m \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = [3(m+2)]^2 - 4(1-4m)(-m) \le 0 \\ a = 1 - 4m < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -7m^2 + 40m + 36 \le 0 \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le \frac{20 - 2\sqrt{163}}{7} \\ m \ge \frac{20 + 2\sqrt{163}}{7} \end{array}\right. \\ m > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{20 + 2\sqrt{163}}{7}.$$

Vậy để bất phương trình $(1-4m)x^2 + 3(m+2)x - m \le 0$ vô nghiệm thì $m \ge \frac{20 + 2\sqrt{163}}{7}$.

Dạng 4: ***Giải và biện luận bất phương trình bậc hai 1 ẩn.***

Phương pháp: Xét các trường hợp:

* a = 0: ta thường thu được bất phương trình bậc nhất;

* a > 0: ta xét tiếp các trường hợp sau để giải bất phương trình: $\Delta < 0$; $\Delta = 0$; $\Delta > 0$;

* a < 0: ta xét tiếp các trường hợp sau để giải bất phương trình: $\Delta < 0$; $\Delta = 0$; $\Delta > 0$;

Bài 6: *Giải và biện luận bất phương trình:*

$$(m + 1)x^2 - 2mx + 4(m + 1) > 0 \quad (*)$$

Giải:

Xét $f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx + 4(m + 1)$.

* Nếu $m + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$ thì: (*) $\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$;

Khi $m + 1 \ne 0$, ta có: $\Delta' = m^2 - 4(m + 1)^2 = -3m^2 - 8m - 4$;

Bảng xét dấu của Δ':

m	$-\infty$		-2		$-\frac{2}{3}$		$+\infty$
Δ'		−	0	+	0	−	

* Nếu $m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1$ (1) thì:

+ $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > -\frac{2}{3}$; kết hợp đk (1), ta có: $m > -\frac{2}{3}$

Khi đó: f(x) > 0, với mọi x;

+ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = -\frac{2}{3}$; kết hợp đk (1),ta có: $m = -\frac{2}{3}$

$f(x) = 0$ khi $x = \dfrac{m}{m+1} = -2$

Khi đó: $f(x) > 0$, với mọi $x \neq -2$;

+ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2 < m < -\dfrac{2}{3}$; kết hợp đk (1), ta có: $-1 < m < -\dfrac{2}{3}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$; $x_2 = \dfrac{m+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$. Dễ thấy: $x_1 < x_2$.

Khi đó: $f(x) > 0$ khi $x < \dfrac{m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$ hoặc $x > \dfrac{m+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$.

* Nếu $m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$ (2) thì:

+ $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m < -2$ hoặc $m > -\dfrac{2}{3}$; kết hợp đk (2), ta có: $m < -2$

Khi đó: $f(x) < 0$, với mọi x;

+ $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = -2$ hoặc $m = -\dfrac{2}{3}$; kết hợp đk (2),ta có: $m = -2$;

Khi đó: $f(x) \leq 0$, với mọi x ;

+ $\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2 < m < -\dfrac{2}{3}$; kết hợp đk (2), ta có: $-2 < m < -1$;

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$; $x_2 = \dfrac{m+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$. Dễ thấy: $x_1 > x_2$.

Khi đó: $f(x) > 0$ khi $\dfrac{m+\sqrt{\Delta'}}{m+1} < x < \dfrac{m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$.

Kết luận: – Khi $m \leq -2$ thì (*) vô nghiệm;

- Khi $-2 < m < -1$ thì nghiệm của (*) là: $\dfrac{m+\sqrt{\Delta'}}{m+1} < x < \dfrac{m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$;
- Khi $m = -1$ thì nghiệm của (*) là: $x > 0$;
- Khi $-1 < m < -\dfrac{2}{3}$ thì nghiệm của (*) là:

  $x < \dfrac{m-\sqrt{\Delta'}}{m+1}$ hoặc $x > \dfrac{m+\sqrt{\Delta'}}{m+1}$;
- Khi $m = -\dfrac{2}{3}$ thì (*) đúng với mọi $x \neq -2$;
- Khi $m > -\dfrac{2}{3}$ thì (*) đúng với mọi x;

Chú ý: Ta có thể trình bày cách giải và biện luận bất phương trình (*) bằng cách lập bảng sau đây:

* $a = m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$;

* $\Delta' = -3m^2 - 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{2}{3}$; $m = -2$;

* Bảng biện luận:

m	a	Δ'	Nghiệm của $f(x) > 0$
$+\infty$	$+$	$-$	$\forall x$
$-\frac{2}{3}$		0	$\forall x \neq -2$
	$+$	$+$	$x < x_1$ hoặc $x > x_2$ $(x_1 < x_2)$
-1	0		$x > 0$
-2	$-$	$+$	$x_1 < x < x_2$
$-\infty$		0	Vô nghiệm
	$-$	$-$	Vô nghiệm

Ta thấy rằng giải bằng cách lập bảng thuận tiện hơn.

Bài 7: *Định m để bất phương trình: $(m + 1)x^2 - 2mx + 4(m + 1) > 0$ (*) có nghiệm.*

Giải:

Cách 1: Ta có thể giải bằng cách lập bảng như trên và chọn những giá trị của m để (*) có nghiệm (xem chú ý ở Bài 1).

Cách 2: Ta có: Mệnh đề phủ định của mệnh đề (*) có nghiệm là (*) vô nghiệm.

Vì vậy trước hết ta sẽ tìm m để (*) vô nghiệm, sau đó loại các giá trị m đó đi.

$$(*) \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -3m^2 - 8m - 4 \leq 0 \\ a = m + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -2 \\ m \geq -\frac{2}{3} \end{array}\right. \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Vậy với $m > -2$ thì (*) luôn có nghiệm.

Dạng 5: ***Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức dạng $\frac{f(x)}{g(x)}$, trong đó f(x) là nhị thức hoặc tam thức và g(x) là tam thức bậc hai có dấu không đổi.***

Phương pháp: − Gọi y là một giá trị của $\frac{f(x)}{g(x)}$. Khi đó: phương trình $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ có nghiệm.

− Biến đổi phương trình $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ về dạng $F(x) = 0$ (*), với F(x) là tam thức bậc hai theo biến x (y là tham số).

– Tìm điều kiện của y để (*) có nghiệm, từ đó suy ra GTLN và GTNN của biểu thức.

Bài 8: *Tìm GTLN và GTNN của biểu thức* $\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$.

Giải:

Biểu thức xác định với mọi x.

Gọi y là một giá trị của biểu thức, nghĩa là phương trình $y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1}$ có nghiệm.

Ta có: $y = \frac{x^2+1}{x^2+x+1} \Leftrightarrow y(x^2 + x + 1) = x^2 + 1 \Leftrightarrow (y-1)x^2 + yx + (y-1) = 0$;

PT: $(y-1)x^2 + yx + (y-1) = 0$ có nghiệm khi

$$\Delta = y^2 - 4(y-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 8y - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2.$$

Vậy GTLN của biểu thức là 2 khi $x = -1$; GTNN của biểu thức là $\frac{2}{3}$ khi $x = 1$.

C. BÀI TẬP.

Bài 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $3x^2 - 7x + 2 \leq 0$;

b) $2(x+2)^2 - 7 \geq 7x$;

c) $(x+1)^3 + (2x-1)^3 < 9x^3$;

d) $\frac{2x^2-3x-5}{x^2-4} > 0$;

e) $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25} \geq 0$;

f) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} < \frac{1-2x}{x^3+1}$

g) $(m^2+1)x^2 - 3mx - 8 \leq 0$;

h) $x^2 + 2(2m+1)x + 4m^2 + 4m + 5 > 0$;

i) $|x^2 - 5x + 6| > |x^2 - 7x + 6|$;

j) $\frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 1$.

Bài 2: Giải các bất phương trình sau:

a) $x^4 - 15x^2 - 16 > 0$;

b) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) < 384$;

c) $(6x^2-7x)^2 - 2(6x^2-7x) - 3 \geq 0$

d) $x^2 + (x+1)^2 > \frac{15}{x^2+x+1}$;

e) $x^2 - 5\sqrt{x^2+1} < -5$;

f) $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 < 0$;

g) $(2x^2+x)^2 > 3 - 2x(2x+1)$;

h) $\frac{4}{x^2-3x+2} - \frac{3}{2x^2-6x+1} + 10 > 0$;

i) $(x^2-4x)^2 + (x-2)^2 \leq 10$;

j) $(x+1)^4 + (x+3)^4 \geq 82$.

Bài 3: Giải các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x^2 - 7x + 12 < 0 \\ -2x^2 + 7x + 5 \leq 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \leq 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 3x - 4} \geq 0 \\ x^2 - 9x + 14 \leq 0 \end{cases}$; d) $\begin{cases} (-x^2 + x + 6)(x^2 - 5x + 4) > 0 \\ \dfrac{-x^2 + 5x - 4}{x + 1} \leq x - 1 \end{cases}$

Bài 4: Tìm các giá trị của m để phương trình: $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$

a) Có 2 nghiệm trái dấu;
b) Có 2 nghiệm dương;
c) Có 2 nghiệm âm.

Bài 5: Với giá trị nào của a thì phương trình: $x^4 + (1 - 2a)x^2 + a^2 - 1 = 0$

a) Vô nghiệm; b) Có đúng 1 nghiệm;
c) Có đúng 2 nghiệm; d) Có đúng 3 nghiệm;
e) Có đúng 4 nghiệm;
f) Có đúng 4 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thoả mãn $2x_2 = x_1 + x_3$.

Bài 6: Tìm những giá trị của k để hệ bất phương trình sau vô nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 \\ k^2x + 1 > 3 + (3k - 2)x \end{cases}$$

Bài 7: Cho tam thức $f(x) = (m + 1)x^2 - 2mx + 4(m + 1)$

a) Tìm m để $f(x) > 0$ với mọi x;
b) Tìm m để $f(x) \leq 0$ với mọi x;
c) Tìm m để bất phương trình $f(x) > 0$ vô nghiệm;
d) Tìm m để bất phương trình $f(x) < 0$ vô nghiệm.

Bài 8: Định m sao cho với mọi x ta đều có:

a) $5x^2 - x + m > 0$; b) $mx^2 - 10x - 5 < 0$;
c) $mx^2 - 2(m - 1)x + 4m \leq 0$; d) $(m + 2)x^2 - (3m - 1)x + m - 1 \geq 0$;
e) $-9 < \dfrac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 6$; f) $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| < 2$;

Bài 9: Giải và biện luận các bất phương trình:

a) $mx^2 - 2(m - 1)x + m + 3 > 0$;
b) $mx^2 - 2(m - 2)x + 2m - 1 < 0$;
c) $(m^2 - 3m + 2)x^2 - 2m^2x - 5 \geq 0$;
d) $(m^2 - 4)x^2 - 4m(m - 1)x + 4m^2 \geq 0$.

Bài 10: Giải và biện luận bất phương trình: $\dfrac{ax - a(1 - a)}{a^2 - ax - 1} > 0$.

Bài 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

a) $A = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 2}$; b) $B = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 + x - 1}$.

§7. ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN:

***1.** Định lí: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ và một số α. Nếu $af(\alpha) < 0$ thì $f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) và $x_1 < \alpha < x_2$.*

***2.** Quy tắc so sánh một số α với nghiệm của tam thức bậc hai $f(x)$:*

Điều kiện		Kết luận
$af(\alpha) < 0$		$f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và $x_1 < \alpha < x_2$
$af(\alpha) = 0$		$f(x)$ có nghiệm (α là một nghiệm)
$af(\alpha) > 0$	$\Delta < 0$	$f(x)$ vô nghiệm
	$\begin{cases}\Delta \geq 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha > 0\end{cases}$	$f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 \leq x_2$ và $\alpha < x_1 \leq x_2$
	$\begin{cases}\Delta \geq 0 \\ \frac{S}{2} - \alpha < 0\end{cases}$	$f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 \leq x_2$ và $x_1 \leq x_2 < \alpha$

(ở đây: $S = x_1 + x_2$)

***3.** Các hệ quả: Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$. Khi đó:*

−Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt ⇔ tồn tại α sao cho $af(\alpha) < 0$.

− Phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm sao cho một nghiệm nằm trong khoảng $(\alpha; \beta)$, nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[\alpha; \beta]$ ⇔ $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

Dạng 1: ***So sánh một số α với các nghiệm của tam thức bậc hai.***

Phương pháp: Dùng quy tắc nêu ở phần 2 (kiến thức cơ bản).

Bài 1. *So sánh số 1 với các nghiệm của các phương trình sau:*

a) $5x^2 - 4x - 3 = 0$; *b) $-3x^2 + 5x + 7 = 0$;*

c) $-x^2 - (2m + 3)x + 2(m + 5) = 0$;

Giải:

a) Đặt $f(x) = 5x^2 - 4x + 3$. Ta có:

$af(1) = 5.(-2) = -10 < 0$;

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < 1 < x_2$.

b) Đặt $f(x) = -3x^2 - 6x + 7$. Ta có: $af(1) = (-3).(-2) = 6 > 0$;

$$\Delta' = 30 > 0;\ \frac{S}{2} - 1 = -1 - 1 = -2 < 0;$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < x_2 < 1$.

c) Đặt $f(x) = -x^2 - (2m+3)x + 2(m+5)$. Ta có:

$af(1) = (-1).6 = -6 < 0$;

Vậy phương trình luôn có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < 1 < x_2$.

Nhận xét: Khi so sánh số α với các nghiệm của tam thức:

- Nếu $f(\alpha) < 0$ thì ta có ngay kết luận $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ và $x_1 < \alpha < x_2$.
- Nếu $f(\alpha) > 0$ thì ta phải xét tiếp dấu của Δ và $\frac{S}{2} - \alpha$ để so sánh.

Bài 2: *So sánh số −2 với các nghiệm của phương trình:*

$$(m + 3)x^2 + 2(m - 3)x + m - 2 = 0.$$

Giải:

Đặt $f(x) = (m + 3)x^2 + 2(m - 3)x + m - 2$. Ta có:

$af(-2) = (m + 3)(m + 22)$; $af(-2) = 0 \Leftrightarrow m = -3$; $m = -22$;

$\Delta' = (m - 3)^2 - (m + 3)(m - 2) = -7m + 15$; $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{15}{7}$

$\frac{S}{2} + 2 = \frac{3 - m}{m + 3} + 2 = \frac{m + 9}{m + 3}$; $\frac{S}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -9$.

Ta lập được bảng sau:

m	*Δ'*	*af(−2)*	$\frac{S}{2} + 2$	*So sánh số −2 với các nghiệm của f(x)*
$+\infty$	−	+	+	vô nghiệm
$\frac{15}{7}$	0			$x_1 = x_2 = \frac{1}{6} > -2$
	+	+	+	$-2 < x_1 < x_2$
−3		0		$x = -\frac{5}{12} > -2$
	+	−	−	$x_1 < -2 < x_2$
−9			0	$x_1 < -2 < x_2$
	+	−	+	$x_1 < -2 < x_2$
−22		0		$-2 = x_1 < x_2$
$-\infty$	+	+	+	$-2 < x_1 < x_2$

Chú ý: Khi $af(x)$ hoặc Δ có chứa tham số mà dấu của chúng phụ thuộc vào tham số thì ta thực hiện (lập bảng) như Bài 2, tức là xét 2 trường hợp:

* $a = 0$;

* $a \neq 0$: lập bảng xét dấu chung của các yếu tố: $af(\alpha)$; Δ; $\frac{S}{2} - \alpha$.

Bài 3: *Tìm giá trị của m để phương trình: $(m + 3)x^2 + 2(m - 3)x + m - 2 = ($ có ít nhất 1 nghiệm nhỏ hơn −2.*

Giải:

Cách 1: Ta lập bảng (như Bài 2) rồi tìm giá trị m thích hợp.

Cách 2: * Khi $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$: PT có nghiệm $x = -\frac{5}{12} > -2$ (loại).

* Khi $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$: PT $(m +3)x^2 + 2(m -3)x + m -2 = 0$ có ít nhất 1 nghiệm nhỏ hơn -2 khi và chỉ khi:

- Hoặc $x_1 < -2 < x_2$ (1);
- Hoặc $x_1 \leq x_2 < -2$ (2).

Ta có: (1) $\Leftrightarrow af(-2) = (m +3)(m +22) < 0 \Leftrightarrow -22 < m < -3$;

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = -7m + 15 \geq 0 \\ af(-2)=(m+3)(m+22)>0 \\ \dfrac{S}{2} = \dfrac{m+9}{m+3} < 0 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{15}{7} \\ \left[\begin{array}{l} m>-3 \\ m<-22 \end{array}\right. \\ -9 < m < -3 \\ m \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy khi $-22 < m < -3$ thì PT có ít nhất 1 nghiệm nhỏ hơn 2.

Dạng 2: ***Chứng minh tam thức có nghiệm.***

Phương pháp: Sử dụng các hệ quả của định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai:

Cách 1: Chứng minh có số α sao cho $af(\alpha) \leq 0$;

Cách 2: Chứng minh có 2 số α, β sao cho $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$.

Bài 4: *Chứng minh các tam thức sau có nghiệm:*

a) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + 4mx - 4m^2 - 8m -7$;

b) $f(x) = (x +1)(x -5) + mx(x -6)$;

c) $f(x) = (x -m)(x -n) + (x - n)(x -p) + (x -p)(x -m)$;

Giải:

a) Ta có: $a = m^2 + 1 > 0$;

$f(2) = 4(m^2 + 1) + 8m - 4m^2 - 8m - 7 = -3 < 0$;

$\Rightarrow af(2) = -3(m^2 + 1) < 0$.

Vậy f(x) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

b) Nếu khai triển f(x) thì ta thu được tam thức bậc hai theo biến x

Ta có: $f(0) = -5$; $f(6) = 7 \Rightarrow f(0).f(6) = -35 < 0$.

Vậy f(x) luôn có nghiệm.

c) Nếu khai triển f(x) thì ta thu được tam thức bậc hai theo biến x có $a = 3 > 0$.

Ta có: $f(m) = (m - n)(m - p)$; $f(n) = (n - p)(n - m)$; $f(p) = (p - m)(p - n)$;

$\Rightarrow f(m)f(n)f(p) = -(m - n)^2(n - p)^2(p - m)^2 \leq 0$

Nếu $f(m)f(n)f(p) = 0$ thì hoặc $f(m) = 0$ hoặc $f(n) = 0$ hoặc $f(p) = 0 \Rightarrow$ hoặc m hoặc n hoặc p là nghiệm của f(x).

Nếu $f(m)f(n)f(p) < 0$ thì phải có ít nhất 1 trong 3 giá trị f(m), f(n), f(p) là số âm, chẳng hạn $f(m) < 0 \Rightarrow af(m) = 3f(m) < 0$.

Vậy f(x) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Nhận xét: – Khi hệ số a có dấu xác định thì ta thường chỉ cần tìm 1 số α sao cho $af(\alpha) \leq 0$ và trong $f(\alpha)$ số các luỹ thừa bậc lẻ của tham số là ít nhất (thậm chí không có).

(Bạn đọc hãy tìm câu trả lời cho câu hỏi: Vì sao trong bài a) ta chọn $\alpha = 2$?).

– Khi hệ số a có chứa tham số và dấu chưa xác định được thì ta thường tìm 2 số α, β sao cho $f(\alpha)f(\beta) \le 0$ và trong $f(\alpha)$, $f(\beta)$ sự có mặt của tham số là ít nhất (thậm chí không có).

(Bạn đọc hãy tìm câu trả lời cho câu hỏi: Vì sao trong bài b) ta chọn $\alpha = 0$, $\beta = 6$?).

Dạng 3: *Tìm giá trị của tham số để phương trình bậc 2 (bất phương trình bậc 2) có nghiệm thoả mãn điều kiện cho trước.*

Phương pháp: Ta thường gặp bài toán sau:

1) Tìm giá trị của tham số để phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có nghiệm lớn hơn (nhỏ hơn) một số α cho trước: Sử dụng định lí đảo về dấu của tam thức bâc hai (xem Bài 3 – Dạng 1).

2) Tìm giá trị của tham số để phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$: Ta xét các trường hợp sau:

(1) $f(x)$ có 2 nghiệm và chỉ một nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$, tức là: $x_1 < \alpha < x_2$ hoặc $x_1 < \beta < x_2$ hoặc $f(\alpha) = 0$ hoặc $f(\beta) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) \le 0$.

(2) $f(x)$ có 2 nghiệm đều thuộc $(\alpha; \beta)$, tức là: $\alpha < x_1 \le x_2 < \beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \alpha > 0 \\ \dfrac{S}{2} - \beta \end{cases}$$

Chú ý: – Đôi khi bài toán chỉ yêu cầu các nghiệm thoả 1 trong hai trường hợp trên.

– Ta cũng có thể lập bảng xét dấu chung cho các yếu tố: Δ, $af(\alpha)$, $\frac{S}{2} - \alpha$, $af(\beta)$, $\frac{S}{2} - \beta$ và dựa vào đó để giải quyết dạng toán này.

– Để PT: $f(x) = 0$ chỉ có nghiệm thuộc $(\alpha; \beta)$ ta thay đk (1) bằng $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

3) Tìm giá trị của tham số để phương trình bậc hai $f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ và α, β nằm trong khoảng hai nghiệm, tức là: $x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$$

4) Tìm giá trị của tham số để bất phương trình bậc hai có nghiệm thuộc một miền M cho trước: Căn cứ vào yêu cầu của bất phương trình và dấu của hệ số a để xác định tập nghiệm của bất phương trình từ đó ta có các điều kiện tương ứng để bất phương trình có nghiệm thuộc M.

Ta thường gặp các bài toán sau:

ĐK để f(x) > 0 với mọi $x > \alpha$ $(x < \alpha)$:

(1) f(x) > 0 với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \le \alpha \left(-\dfrac{b}{2a} \ge \alpha\right) \end{cases}$

(3) a > 0; f(x) có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và $x_1 < x_2 \le \alpha$ $(\alpha \le x_1 < x_2)$.

ĐK để f(x) < 0 với mọi $x > \alpha$ $(x < \alpha)$:

(1) f(x) < 0 với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$;

(2) $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \ge \alpha \left(-\dfrac{b}{2a} \le \alpha\right) \end{cases}$

(3) a < 0; f(x) có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ và $x_1 < x_2 \le \alpha$ $(\alpha \le x_1 < x_2)$.

ĐK để f(x) > 0 có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ cho trước (f(x) là tam thức):

+ Nếu a > 0: f(x) > 0 có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ khi và chỉ khi các trường hợp sau xảy ra:
(1) f(x) ≥ 0 với mọi x $\Leftrightarrow \Delta \le 0$;
(2) f(x) = 0 có nghiệm thuộc đoạn $[\alpha; \beta]$.

+ Nếu a < 0: f(x) > 0 có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ khi và chỉ khi các trường hợp sau xảy ra:
(1) f(x) = 0 có nghiệm thuộc đoạn $[\alpha; \beta]$;
(2) f(x) = 0 có 2 nghiệm: $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ (trong trường hợp này f(x) > 0 với mọi x thuộc $[\alpha; \beta]$).

ĐK để f(x) < 0 có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ cho trước (f(x) là tam thức):

+ Nếu a < 0: f(x) < 0 có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ khi và chỉ khi các trường hợp sau xảy ra:
(1) f(x) ≤ 0 với mọi x $\Leftrightarrow \Delta \le 0$;
(2) f(x) = 0 có nghiệm thuộc đoạn $[\alpha; \beta]$.

+ Nếu a > 0: f(x) < 0 có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ khi và chỉ khi các trường hợp sau xảy ra:
(1) f(x) có nghiệm thuộc đoạn $[\alpha; \beta]$;
(2) f(x) = 0 có 2 nghiệm: $x_1 < \alpha < \beta < x_2$ (trong trường hợp này f(x) < 0 với mọi x thuộc $[\alpha; \beta]$)

Bài 5: *Tìm giá trị của m để phương trình:* $(m + 3)x^2 + 2(m - 3)x + m - 2 = 0$ *có nghiệm thuộc đoạn* $[-1; 1]$.

Giải:

Đặt $f(x) = (m + 3)x^2 + 2(m - 3)x + m - 2$. Ta có:

* Nếu $m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ thì phương trình trở thành:

$-12x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{5}{12}$ thuộc $[-1; 1]$ (*);

* Nếu $m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -3$ thì:

$af(-1) = 7(m + 3)$; $af(1) = (m + 3)(4m - 5)$;

$\Delta' = (m - 3)^2 - (m + 3)(m - 2) = -7m + 15$;

$\dfrac{S}{2} + 1 = \dfrac{3 - m}{m + 3} + 1 = \dfrac{6}{m + 3}$; $\dfrac{S}{2} - 1 = \dfrac{3 - m}{m + 3} - 1 = \dfrac{-2m}{m + 3}$;

Khi đó: $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc đoạn $[-1; 1]$ khi

(1) $f(x)$ có 2 nghiệm và chỉ một nghiệm thuộc $[-1; 1]$

(2) $f(x)$ có 2 nghiệm đều thuộc $(-1; 1)$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow f(-1).f(1) \leq 0 \Leftrightarrow 7(m + 3)^2(4m - 5) \leq 0 \Leftrightarrow 4m - 5 \leq 0$

$\Leftrightarrow m \leq \dfrac{5}{4}$ (**);

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(1) > 0 \\ \dfrac{S}{2} + 1 > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7m + 15 \geq 0 \\ 7(m+3) > 0 \\ (m+3)(4m-5) > 0 \\ \dfrac{6}{m+3} > 0 \\ \dfrac{-2m}{m+3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \dfrac{15}{7} \\ m > -3 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > \dfrac{5}{4} \end{array}\right. \\ m > -3 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m \leq \frac{15}{7}$$

(***).

Từ (*), (**) và (***) ta có: với $m \leq \dfrac{15}{7}$ thì PT $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $[-1; 1]$.

Chú ý: Ta có thể giải bài tập này bằng cách lập bảng như sau:
Đặt $f(x) = (m + 3)x^2 + 2(m - 3)x + m - 2$. Ta có:

$af(-1) = 7(m + 3)$; $af(-1) = 0 \Leftrightarrow m = -3$;

$af(1) = (m + 3)(4m - 5)$; $af(1) = 0 \Leftrightarrow m = -3$; $m = \dfrac{5}{4}$;

$\Delta' = (m - 3)^2 - (m + 3)(m - 2) = -7m + 15$; $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{15}{7}$;

$\dfrac{S}{2} + 1 = \dfrac{3 - m}{m + 3} + 1 = \dfrac{6}{m + 3}$; $\dfrac{S}{2} + 1 \neq 0,\ \forall m \neq -3$,

$\dfrac{S}{2} - 1 = \dfrac{3 - m}{m + 3} - 1 = \dfrac{-2m}{m + 3}$; $\dfrac{S}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 0$;

Ta lập bảng:

m	Δ'	$(m+1)f(-1)$	$\frac{S}{2}+1$	$(m+1)f(1)$	$\frac{S}{2}-1$	Vị trí các nghiệm
$+\infty$	−	+	+	+	−	vô nghiệm
$\frac{15}{7}$	0					$x_1 = x_2 = \frac{1}{6}$ thuộc $[-1; 1]$
	+	+	+	+	−	$-1 < x_1 < x_2 < 1$
$\frac{5}{4}$				0		$-1 < x_1 < x_2 = 1$
	+	+	+	−	−	$-1 < x_1 < 1 < x_2$
0					0	$-1 < x_1 < 1 < x_2$
	+	+	+	−	+	$-1 < x_1 < 1 < x_2$
−3		0		0		$x = -\frac{5}{12}$ thuộc $[-1; 1]$
$-\infty$	+	−	−	+	−	$x_1 < -1 < x_2 < 1$

Dựa vào bảng trên ta có với $m \leq \frac{15}{7}$ thì PT $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $[-1; 1]$.

Nhận xét: Khi lập bảng ta còn có thể tìm được giá trị m để các nghiệm của PT thoả các điều kiện khác. Vì vậy đối với những bài toán phức tạp (có nhiều trường hợp xảy ra) thì nên giải bằng cách lập bảng.

Bài 6: *Tìm giá trị của m để phương trình* $x^4 + mx^3 - 2mx^2 + mx + 1 = 0$ *có nghiệm.*

Giải:

Dễ thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình đã cho. Chia 2 vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + m\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2m = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$; $t \leq -2$ hoặc $t \geq 2$.

Thế vào (1) ta được: $t^2 + mt - 2(m+1) = 0$ (2).

Như vậy: (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm nằm ngoài $(-2; 2)$.

Vì vậy, trước hết ta sẽ tìm m để (2) vô nghiệm hoặc (2) có 2 nghiệm đều thuộc $(-2; 2)$:

* (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 + 8(m+1) < 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m + 1 < 0$

$$\Leftrightarrow -2(2 + \sqrt{2}) < m < -2(2 - \sqrt{2})$$

* (2) có 2 nghiệm đều thuộc (−2; 2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-2)>0 \\ \dfrac{S}{2}+2>0 \\ af(2)>0 \\ \dfrac{S}{2}-2<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+8m+8 \geq 0 \\ -4m+2>0 \\ -\dfrac{m}{2}+2>0 \\ 2>0 \\ -\dfrac{m}{2}-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \leq -2(2+\sqrt{2}) \\ m \geq -2(2-\sqrt{2}) \end{array}\right. \\ m < \dfrac{1}{2} \\ \forall m \\ m < 4 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -2(2-\sqrt{2}) \leq m < \frac{1}{2}.$$

Vậy PT (2) vô nghiệm hoặc (2) có nghiệm thuộc (−2; 2)

khi $-2(2+\sqrt{2}) < m < \dfrac{1}{2}$.

Từ đó: (2) có nghiệm nằm ngoài (−2; 2) khi $m \leq -2(2+\sqrt{2})$ hoặc $m \geq \dfrac{1}{2}$

hay PT (1) có nghiệm khi $m \leq -2(2+\sqrt{2})$ hoặc $m \geq \dfrac{1}{2}$.

Chú ý: PT được cho trong Bài 2 là PT dạng đối xứng.

Bài 6: _Tìm giá trị của m để bất phương trình_ $x^2 + 2mx + m < 0$ _thoả mãn với mọi x thuộc (1; 2)._

Giải:

Đặt $f(x) = x^2 + 2mx + m$.

Vì hệ số a = 1 > 0 nên để f(x) < 0 thoả mãn với mọi x thuộc (1; 2) thì f(x) = 0 có 2 nghiệm phân biệt và $x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2$ (*).

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ af(1) \leq 0 \\ af(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 3m+1 \leq 0 \\ 5m+4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m \leq -\dfrac{1}{3} \\ m \leq -\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{4}{5}.$$

Vậy với $m \leq -\dfrac{4}{5}$ thì bất phương trình f(x) < 0 thoả mãn với mọi x thuộc (1; 2).

Bài 8: *Tìm giá trị của m để bất phương trình $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ (*) với mọi $x > 0$.*

Giải:

* Nếu m = 0 thì (*) $\Leftrightarrow -4x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}$ (không thoả với mọi x > 0);

* Nếu $m \neq 0$ thì: (*) thoả với mọi x > 0 khi và chỉ khi:

(1) (*) đúng với mọi x;

(2) (*) có hai khoảng nghiệm: $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$ mà trongđó $(x_2; +\infty)$ phải chứa $(0; +\infty)$.

Ta có: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m(3m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3m^2 - m + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -\frac{4}{3} \\ m > 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' \geq 0 \\ m.f(0) \geq 0 \\ \frac{S}{2} - 0 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -3m^2 - m + 4 \geq 0 \\ m(3m+1) \geq 0 \\ \frac{2}{m} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -\frac{4}{3} \leq m \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right. \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{vônghiệm.}$$

Vậy khi $m > 1$ thì $mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$ với mọi $x > 0$.

C. BÀI TẬP

Bài 1: So sánh số −1 với các nghiệm của các phương trình sau:

a) $-3x^2 + 7x + 8 = 0$;

b) $2x^2 + 3x - 2 = 0$;

c) $(m^2 + 3)x^2 + (2m^2 - 1)x + m^2 - 5 = 0$;

d) $(m + 1)x^2 - 2mx + 4m + 1) = 0$.

Bài 2: Tìm m để phương trình $x^2 + 2(m + 1)x + 9m - 5 = 0$ thoả nãn:

a) Có hai nghiệm và cả hai nghiệm đều nhỏ hơn 2;

b) Có hai nghiệm, trong đó một nghiệm nhỏ hơn 2 cònnghiệm kia lớn hơn 2;

c) Có hai nghiệm và cả hai nghiệm đều lớn hơn 2.

Bài 3: Tìm a để các phương trình:

a) $x^2 + 4ax + (1 - 2x + 4a^2) = 0$ có các nghiệm nhỏ hơn −1;

b) $x^2 + (2a + 6)x + 4a + 12 = 0$ có các nghiệm lớn hơn − ;

c) $(1 + a)x^2 - 3ax + 4a = 0$ có các nghiệm lớn hơn 1;

d) $(a^2 + a + 1)x^2 + (2a - 3)x + a - 5 = 0$ có một nghiệmlớn hơn 1, một nghiệm nhỏ hơn 1;

e) $x^2 - ax + 2 = 0$ có các nghiệm trong khoảng $(0; 3)$;

f) $x^2 - 2ax - 1 = 0$ có các nghiệm không vượt quá 2 về giá trị tuyệt đối;

g) $ax^2 - (a+1)x + 2 = 0$ có các nghiệm với giá trị tuyệt đối lớn hơn 2.

Bài 4: Chứng minh các phương trình sau có nghiệm:

a) $x^2 + 3(m+1)x - 3m - 7 = 0$;

b) $-x^2 - (5m-2)x - 10m + 5 = 0$;

c) $(2m^2+1)x^2 + 4mx - 2m^2 + 4m - 2 = 0$;

d) $(-m^2 - 1)x^2 - 3mx + m^4 + 4m^2 - 1 = 0$;

e) $m^2(x^2 - 9) + 2x(x - 4) = 0$;

f) $2x^2 - 3x - 5 - m(x^2 - 5x + 6) = 0$;

g) $m(x^2 - 3x + 2) + m(x^2 - 5x + 6) + m(x^2 - 4x + 3) = 0$;

h) $\dfrac{a^2}{x-p} + \dfrac{b^2}{x-q} = 1$ $(a, b \neq 0)$.

Bài 5: Cho phương trình: $x^2 - (3m+1)x + 2m^2 - m = 0$. Tìm m để phương trình trên:

a) Có hai nghiệm;

b) Có hai nghiệm dương;

c) Có 2 nghiệm đều thuộc $[-1; 1]$;

d) Có 2 nghiệm đều thoả mãn bất phương trình $x^2 - 4 \leq 0$.

Bài 6: Cho bất phương trình: $(m+1)x^2 - 3mx + 4m > 0$. Tìm m để bất phương trình:

a) Thoả mãn với mọi x;

b) Có nghiệm;

c) Thoả mãn với mọi $x > 1$;

d) Có nghiệm $x > 1$;

e) Thoả mãn với mọi x thuộc $[-1; 1]$;

f) Có nghiệm thuộc $[-1; 1]$.

Bài 7: Tìm m để bất phương trình: $\dfrac{mx - m + m^2}{m^2 + 1 - mx} > 0$ đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

Bài 8: Tìm m để các bất phương trình sau có nghiệm:

a) $(m-1)x^4 + 2mx^2 - 3m + 2 \leq 0$;

b) $(x+1)(x+3)(x^2 + 4x + 6) \geq m$;

c) $x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 < 0$;

d) $(2x^2 - x)^2 + (2m^2 - m)(2x^2 - x) - 2m^2 > 0$.

Bài 9: Tìm k để phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x = k$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 10: Cho hai bất phương trình: $(m-2)^2x^2 - 3(m-6)x - m - 1 < 0$ (1)

$x^2 + x < 0$ (2)

Tìm giá trị của m để mọi nghiệm của bất phương trình (2) đều là nghiệm của bất phương trình (1).

§8. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1/ Phương trình bậc cao

– Phương trình trùng phương $ax^2 + bx^2 + c = 0$

Đặt $X = x^2$, *với* $X \geq 0$ *và quy phương trình đã cho về phương trình bậc hai.*

– Phương trình dạng $(x + a)(x + b)(x + c)(x + d) = e$ *với* $a + b = c + d$.

Đặt $X = (x + a)(x + b)$ *và quy phương trình đã cho về dạng phương trình bậc hai.*

– Phương trình dạng $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$

Đặt $X = \dfrac{x + a + x + b}{2}$ *tức là* $X = x + \dfrac{a + b}{2}$, *khi đó* $x + a = X + \dfrac{a - b}{2}$; $x + b = X - \dfrac{a - b}{2}$ *và đưa về phương trình trùng phương.*

– Phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$ $(a \neq 0)$

Chia hai vế phương trình cho x^2 *(vì* $x = 0$ *không phải là nghiệm), phương trình trở thành* $a(x^2 + \dfrac{1}{x^2}) + b(x \pm \dfrac{1}{x}) + c = 0$.

Đặt $X = x \pm \dfrac{1}{x}$ *và quy phương trình đã cho về phương trình bậc hai.*

– Đối với một số dạng bậc cao ta có thể dùng phương pháp phân tích ra thành các thừa số hoặc đặt ẩn phụ hoặc dùng phép thử để tìm nghiệm. (Việc phân tích có thể sử dụng cách tìm một nghiệm $x = a$ *rồi thực hiện phép chia đa thức) trong phương trình đã cho, cho thừa số* $x - a$.

Chú ý vận dụng kết quả ứng dụng của hệ thức Viecte để tìm một số nghiệm đặc biệt

Chẳng hạn, đối với phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

+ Có dạng $a + b + c + d = 0 \Rightarrow$ *phương trình có nghiệm* $x = 1$

+ Có dạng $a - b + c - d = 0 \Rightarrow$ *phương trình có nghiệm* $x = -1$

2/ Phương trình chứa ẩn ở mẫu. *Ta thực hiện:*

– Đặt điều kiện có nghĩa của phương trình (tìm tập xác định của nó)

– Khử mẫu và đưa về dạng phương trình thông thường

– Kiểm tra đối chiếu với điều kiện nghiệm.

3/ Phương trình chứa dấu trị số tuyệt đối ta có thể sử dụng một trong các phương pháp sau:

– Phương pháp chia khoảng trên trục số

Chú ý: $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu} \quad A \geq 0 \\ -A & \text{nếu} \quad A < 0 \end{cases}$

– Phương pháp biến đổi tương đương

Chú ý một số dạng cơ bản:

$$|A| = B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ B \geq 0 \end{cases}$$

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A^2 = B^2 \Leftrightarrow (A - B)(A + B) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$$

− Phương pháp đặt ẩn phụ

4/ Phương trình có chứa căn (phương trình cotg) ta có thể sử dụng một số phương pháp:

− Phương pháp biến đổi tương đương

Chú ý: + Một số dạng cơ bản

$$\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$$

$$\sqrt{A} = \sqrt{B} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0 \\ A = B \end{cases}$$

+ Đối với phương trình có chứa nhiều căn bậc hai thì khi giải cần để ý đặt điều kiện để phương trình có nghĩa và sử dụng phép biến đổi tương đương bình phương hai vế (với điều kiện 2 vế phải cùng dấu).

− Phương pháp đặt ẩn phụ

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 1: *Cho phương trình $mx^4 - 2(m - 3)x^2 + m - 4 = 0$ (1). Tìm m để phương trình:*

a. Có nghiệm duy nhất

b. Có hai nghiệm phân biệt

c. Có ba nghiệm phân biệt

d. Có bốn nghiệm phân biệt

e. Vô nghiệm

Giải:

Đặt $X = x^2$, $X \geq 0$, khi đó:

(1) $\Leftrightarrow mX^2 - 2(m - 3)X + m - 4 = 0$ (2)

Trường hợp 1: Nếu m = 0, phương trình (2) $\Leftrightarrow X = \dfrac{4}{6} \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Trường hợp 2: Nếu $m \neq 0$

a. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $X_2 \leq 0 = X_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \leq 0 \\ P = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2(m-3)}{m} \leq 0 \\ \dfrac{m-4}{m} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m \leq 3 \\ m = 4 \end{cases} \Rightarrow \text{vô nghiệm}$$

b. Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $X_1 < 0 < X_2$

$$\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow \frac{m-4}{m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$$

Vậy, với $0 \leq m < 4$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

c. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt ⇔ (2) có nghiệm $0 = X_1 < X_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 2m > 0 \\ \dfrac{m-4}{m} = 0 \\ \dfrac{2(m-3)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{2} \\ m = 4 \\ m < 0 \text{ hoặc } \quad m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$$

d. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ (2) có 2 nghiệm $0 < X_1 < X_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \dfrac{9}{2} \\ m < 0 \quad \text{hoặc} \quad m > 4 \\ m < 0 \quad \text{hoặc} \quad m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } 4 < m < \frac{9}{2}$$

e. Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2) \quad \text{vô nghiệm} \\ (2) \text{ có 2 nghiệm } \quad X_1 \le X_2 < 0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta' < 0 \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{9}{2} \\ \begin{cases} m \le \dfrac{9}{2} \\ m < 0 \quad \text{hoặc } m > 4 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge \dfrac{9}{2} \\ \\ \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge \frac{9}{2}$$

vô nghiệm

Bài 2: *Cho phương trình* $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 4m \qquad (1)$

a. Giải phương trình khi $m = 4$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm $[-6; -2]$

Giải:

Đặt $X = \dfrac{x + 3 + x + 5}{2} = x + 4$. Suy ra $\begin{cases} x + 3 = X - 1 \\ x + 5 = X + 1 \end{cases}$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$(X - 1)^4 + (X + 1)^4 - 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow X^4 + 6X^2 + 1 - 2m = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X^2 = t \ge 0 \\ t^2 + 6t + 1 - 2m = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

1. Với m = 4, phương trình (2) trở thành:

$$t^2 + 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -7 \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $X^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -1 \\ X = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x + 4 = -1 \\ x + 4 = 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = -3 \end{array}\right.$

2. Ta có: $-6 \le x \le -2 \Leftrightarrow -2 \le x + 4 \le 2$

$\Leftrightarrow \quad -2 \le X \le 2 \Leftrightarrow |X| \le 2 \Leftrightarrow 0 \le X^2 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le t \le 4$

Vậy, phương trình (1) có nghiệm trên $[-6, -2]$

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có ít nhất 1 nghiệm trên $[0, 4]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} f(0).f(4) \le 0 & (*) \\ \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ f(0) \ge 0 \\ f(4) \ge 0 \\ 0 \le \dfrac{S}{2} \le 4 \end{cases} & (**) \end{array}\right. \qquad \text{Hệ (**) vô nghiệm (vì } \frac{S}{2} = -3 \text{)}$$

$$(*) \quad \Leftrightarrow \quad (1 - 2m)(41 - 2m) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le m \le \frac{41}{2}$$

Bài 3: *Cho phương trình: $(x - 1)(x + 5)(x - 3)(x + 7) = m$ (1)*

a. *Giải phương trình khi $m = 260$*

b. *Với giá trị nào của m thì phương trình có 4 nghiệm phân biệt*

c. *Với giá trị nào của m thì phương trình vô nghiệm*

Giải:

Nhận xét: $-1 + 5 = -3 + 7$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x - 21) - m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 5 = X; \\ f(x) = X^2 - 16X - m = 0 \quad (2) \end{cases} \qquad \text{(điều kiện } X \ge -9\text{)}$$

a. Với $m = 260$, phương trình (2) $\Leftrightarrow X^2 - 16X - 260 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = -10 \quad \text{(loại)} \\ X = 26 \end{cases}$$

Vậy: $x^2 + 4x - 5 = 26 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 31 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + \sqrt{35} \\ x = -2 - \sqrt{35} \end{array}\right.$

b. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $-9 < X_1 < X_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 64 + m \ge 0 \\ f(-9) = 225 - m > 0 \\ \dfrac{S}{2} = 8 > -9 \end{cases} \Leftrightarrow -64 \le m < 225$$

c. Phương trình (1) vô nghiệm

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) vô nghiệm hoặc

Phương trình hai có nghiệm $X_1 \le X_2 < -9$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta < 0\\ \begin{cases}\Delta \ge 0\\ f(-9) > 0\\ \dfrac{S}{2} < -9\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}64 + m < 0\\ \begin{cases}64 + m \ge 0\\ 225 - m > 0\\ 8 < -9 \quad \text{Vô lí}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \quad m < -64$$

Bài 4: *Cho phương trình:* $x^4 + mx^3 + 2mx^2 + mx + 1 = 0$ *(1)*

a. *Giải phương trình khi* $m = -\frac{1}{2}$

b. *Tìm m để phương trình có nghiệm*

Giải:

Nhận xét rằng, x = 0 không phải là nghiệm của phương trình đã cho, nên:

$$(1) \Leftrightarrow x^2 + mx + 2m + \frac{m}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x + \dfrac{1}{x} = X\\ f(x) = X^2 + mx + 2m - 2 = 0\end{cases} \qquad \text{(điều kiện } |X| \ge 2\text{) (2)}$$

a. Với $m = -\frac{1}{2}$, phương trình (2) $\Leftrightarrow X^2 - \frac{1}{2}X - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad 2X^2 - X - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}X = 2\\ X = -\dfrac{3}{2} \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Vậy, $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

b. Nhận xét rằng, phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $|x| \ge 2$. Trước hết, tìm điều kiện của m để phương trình vô nghiệm

Phương trình (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{Phương trình (2) vô nghiệm}\\ \text{Phương trình (2) có nghiệm } -2 < X_1 \le X_2 < 2\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = m^2 - 8m + 8 < 0 \\ \begin{cases} \Delta = m^2 - 8m + 8 \ge 0 \\ f(-2) = 2 > 0 \\ f(2) = 4m + 2 > 0 \\ -2 < -\frac{m}{2} < 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - 2\sqrt{2} < m < 4 + 2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} < m \le 4 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra phương trình (1) có nghiệm khi:

$$m \le -\frac{1}{2} \text{ hoặc } m \ge 4 + 2\sqrt{2}$$

Bài 5: *Cho phương trình:*

$$2x^3 + 2(6m - 1)x^2 - 3(2m - 1)x - 3(1 + 2m) = 0 \qquad (1)$$

a. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 2.

b. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt có tổng các bình phương các nghiệm bằng 28.

Giải:

Nhận xét rằng: $2 + 2(6m - 1) - 3(2m - 1) - 3(1 + 2m) = 0$

Phương trình có nghiệm $x = 1$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \quad (x - 1)[2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f(x) = 2x^2 + 12mx + 3(1 + 2m) = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

a. Vì $x = 1 < 2$ do đó phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 2

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $2 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 36m^2 - 12m - 6 > 0 \\ f(2) = 11 + 30m > 0 \\ \frac{S}{2} = -3m > 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1-\sqrt{7}}{6} \text{ hoặc } m > \frac{1+\sqrt{7}}{6} \\ m > -\frac{11}{30} \\ m < -\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{11}{30} < m < -\frac{1-\sqrt{7}}{6}$$

b. Để phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36m^2 - 12m - 6 > 0 \\ 5 + 18m \ne 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1+\sqrt{7}}{6} \\ -\dfrac{5}{18} \neq m < \dfrac{1-\sqrt{7}}{6} \end{array}\right.$$

Khi đó (2) có 2 nghiệm x_1, x_2 và $\begin{cases} x_1 + x_2 = -6m \\ x_1.x_2 = \dfrac{3(1+2m)}{2} \end{cases}$

Để có các nghiệm thoả mãn yêu cầu bài ra thì:

$$x_1^2 + x_2^2 + 1 = 28 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 - 27 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 36m^2 - 6m - 30 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{5}{6} \end{array}\right.$$

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = 1$ hoặc $m = -\dfrac{5}{6}$

Bài 6: *Giải và biện luận phương trình:*

a. $\dfrac{2x}{x+m} - \dfrac{x}{m-x} = \dfrac{m^2}{4(x^2-m^2)}$ *(1)*

b. $\dfrac{a}{x-b} + \dfrac{b}{x-a} = 2$ *(2)*

Giải:

a. Điều kiện $x \neq \pm m$. Khi đó

(1) $\Leftrightarrow$ $8x(x - m) + 4x(x + m) = m^2$

$\Leftrightarrow$ $12x^2 - 4mx - m^2 = 0$ (*)

$\Delta' = 16m^2 \geq 0$

– Nếu $m = 0$ thì (*) $\Leftrightarrow x = 0$ (loại vì $x \neq m$)

– Nếu $m \neq 0$ thì (*) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m}{2} \\ x = -\dfrac{m}{6} \end{array}\right.$ (thoả mãn điều kiện $x \neq \pm m$)

Kết luận: – Với $m = 0$ phương trình vô nghiệm

– Với $m \neq 0$ phương trình có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{m}{2} \\ x = -\dfrac{m}{6} \end{array}\right.$

b. Điều kiện $x \neq a$; $x \neq b$. Khi đó:

(2) $\Leftrightarrow$ $a(x - a) + b(x - b) = 2(x - a)(x - b)$

$\Leftrightarrow$ $2x^2 - 3(a + b)x + (a + b)^2 = 0$ (**)

Ta có: $\Delta = (a + b)^2 \geq 0$

– Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow a = -b$. Phương trình (**) có nghiệm kép $x = 0$

Để $x \neq a$ và $x \neq b$ tức là $x \neq \pm a$ thì $a \neq 0$

– Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow a \neq -b$. Khi đó (**) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a + b \\ x = \dfrac{a+b}{2} \end{array}\right.$

+ Để $x = a + b$ là nghiệm của (2) thì $\begin{cases} a + b \neq a \\ a + b \neq -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

+ Để $x = \dfrac{a+b}{2}$ là nghiệm của (2) thì $\begin{cases} a + b \neq 2a \\ a + b \neq 2b \end{cases} \Leftrightarrow a \neq b$

Kết luận:

– Với $a = -b \neq 0$, phương trình có nghiệm kép $x = 0$

– Với $a = b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = 2a$

– Với $a = b = 0$, phương trình vô nghiệm

– Với $a = 0$ và $b \neq 0$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{b}{2}$

– Với $a \neq 0$ và $b = 0$, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{a}{2}$

– Với $a \neq 0$; $b \neq 0$ và $a \neq \pm b$, thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = a + b$; $x = \dfrac{a+b}{2}$

Bài 7: *Giải phương trình:*

a. $|x^2 - x| + |2x - 4| = 3$ *(1)*

b. $\dfrac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2$ *(2)*

Giải:

a. Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$x^2 - x$		+	0	–	0	+	|	+	
$2x - 4$		–	|	–	|	–	0	+	

– Nếu $x \leq 0$ hoặc $1 < x \leq 2$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - x + 4 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(loại)} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

– Nếu $0 < x \leq 1$. Khi đó:

(1) $\Leftrightarrow$ $-x^2 + x - 2x + 4 - 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy: $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ là nghiệm của phương trình

– Nếu $x > 2$. Khi đó:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x + 2x - 4 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{29}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy, phương trình có nghiệm $x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2}$

Tóm lại, phương trình có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{-1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$

b. Điều kiện $x \neq 0$; $x \neq 2$

$$(2) \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 + |x + 1| = 2|x|\,(x - 2) \qquad (b)$$

Bảng xét dấu:

x	−∞		−1		0		+∞
x		−	|	−	0	+	
x + 1		−	0	+	|	+	

– Nếu $x \leq -1$, khi đó:

$$(b) \quad \Leftrightarrow x^2 - 1 - x - 1 = -2x\,(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 5x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \text{(loại)}$$

– Nếu $-1 < x < 0$, khi đó:

$$(b) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 1 + x + 1 = -2x\,(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{(loại)}$$

– Nếu $x > 0$ và $x \neq 2$, khi đó:

$$x^2 - 1 + x + 1 = 2x\,(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \quad \text{(loại)} \\ x = 5 \end{array}\right.$$

Như vậy, phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 5$

Bài 8: *Giải và biện luận*

a. $|x^2 - 2mx - 2m| = |x^2 + 2x|$ *(1)*

b. $|mx + 1| = x^2 - x + 1$ *(2)*

Giải:

a. $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2mx - 2m = x^2 + 2x \\ x^2 - 2mx - 2m = -x^2 - 2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} (m+1)x = -m & (*) \\ x^2 - (m-1)x - m = 0 & (**) \end{array}\right.$

* Giải và biện luận (*)

– Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$, khi đó:

$(*) \Leftrightarrow 0x = 1$ Phương trình vô nghiệm

– Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$, khi đó

$$(*) \Leftrightarrow x = -\frac{m}{m+1}$$

* Giải và biện luận (**). Ta có $\Delta = (m + 1)^2$

– Nếu $m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1$. Khi đó $(**) \Leftrightarrow x = -1$

– Nếu $m + 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$. Khi đó $(**) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \end{array}\right.$

Kết luận: – Nếu $m = -1$. phương trình đã cho có 1 nghiệm $x = -1$

– Nếu $m \neq -1$, phương trình có 3 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = m \\ x = -\dfrac{m}{m+1} \end{array}\right.$

b. $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} mx + 1 = x^2 - x + 1 \\ mx + 1 = -x^2 + x - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - (m+1)x = 0 & (*) \\ x^2 + (m-1)x + 2 = 0 & (**) \end{array}\right.$

* Giải và biện luận (*)

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m + 1 \end{array}\right.$$

* Giải và biện luận (**)

Ta xét $f(x) = x^2 + (m - 1)x + 2$

$\Delta = m^2 - 2m - 7$

$f(0) = 2 > 0$

$f(m + 1) = 2m^2 + 2m + 2 > 0$

– Nếu $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{2} < m < 1 + 2\sqrt{2}$ thì (**) vô nghiệm

– Nếu $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 - 2\sqrt{2} \\ m = 1 + 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Khi đó:

Với $m = 1 - 2\sqrt{2}$ thì (**) có nghiệm $x = \sqrt{2}$

Với $m = 1 + 2\sqrt{2}$ thì (**) có nghiệm $x = -\sqrt{2}$

– Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 1-2\sqrt{2}$ hoặc $m > 1+2\sqrt{2}$.

Khi đó, phương trình (**) có 2 nghiệm: $\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-m+\sqrt{m^2-2m-7}}{2} \\ x = \dfrac{1-m-\sqrt{m^2-2m-7}}{2} \end{array}\right.$

Kết luận:

– Nếu $m < 1-2\sqrt{2}$ hoặc $m > 1+2\sqrt{2}$ phương trình có 4 nghiệm:

$x = 0$; $x = m + 1$;

$x = \dfrac{1-m+\sqrt{m^2-2m-7}}{2}$; $x = \dfrac{1-m-\sqrt{m^2-2m-7}}{2}$;

– Nếu $m = 1-2\sqrt{2}$ phương trình có 3 nghiệm:

$x = 0$; $x = 2-2\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$

– Nếu $m = 1+2\sqrt{2}$ phương trình có 3 nghiệm:

$x = 0$; $x = 2 + 2\sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$

– Nếu $1-2\sqrt{2} < m < 1+2\sqrt{2}$ và $m \neq 1$, phương trình có 2 nghiệm:

$x = 0$; $x = m + 1$

– Nếu $m = -1$ phương trình có 1 nghiệm: $x = 0$

Bài 9: *Cho phương trình* $|x^2 - 2x + m| = x - 1$ *(1)*

a. *Giải phương trình với m = 0*

b. *Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt*

Giải:

a. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + m = x - 1 \\ x^2 - 2x + m = -x + 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + m + 1 = 0 (2) \\ x^2 - x + m - 1 = 0 (3) \end{array}\right. \end{cases}$

– Với m =0, phương trình trở thành $\begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x + 1 = 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

b Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $1 \leq x_1 < x_2$

Phương trình (3) có 2 nghiệm $1 \leq x_3 < x_4$

Ta có phương trình (3) không thể có hai nghiệm lớn hơn hay bằng 1, vì $\left(\frac{S}{2} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2} < 1\right)$

Vậy phương trình đã cho không thể có 4 nghiệm phân biệt

Bài 10: *Giải và biện luận các phương trình*

a. $|x - 1|(x + 2) + m = 0$ (1)

b. $|x^2 + 2mx + 1| = x + 1$ (2)

Giải:

$$\text{a. (1)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 + x + m - 2 = 0 \end{cases} & \text{(I)} \\ \begin{cases} x < 1 \\ g(x) = x^2 + x - m - 2 = 0 \end{cases} & \text{(II)} \end{array}\right.$$

* Xét hệ (I)

Ta có: $\Delta = 9 - 4m$

$af(1) = m$

$\frac{S}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$

Khi đó ta có bảng sau:

m	Δ	af(1)	Vị trí số 1 so với nghiệm x_1, x_2 của f(x)	Nghiệm của I
$-\infty$				
	+	−	$x_1 < 1 < x_2$	$x_2 = \frac{-1+\sqrt{9-4m}}{2}$
0		0	$x_1 = -2, x = 1$	$x_2 = 1$
	+	+	$x_1 < x_2 < 1$	Vô nghiệm

$\frac{9}{4}$	0		$x_1 = x_2 = -\frac{1}{2} < 1$	Vô nghiệm
	−	+	Vô nghiệm	Vô nghiệm
$+\infty$				

* Xét hệ (II)

Ta có: $\Delta = 9 + 4m$

$$a.g(1) = -m$$

$$\frac{S}{2} - 1 = -\frac{3}{2} < 0$$

Khi đó ta có bảng:

m	**Δ**	**ag(1)**	**So sánh 1 với nghiệm x_3, x_4 của g(x)**	**Nghiệm của II**
$-\infty$				
	−	+	Vô nghiệm	Vô nghiệm
$-\frac{9}{4}$	0		$x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}$	$x_3 = x_4 = -\frac{1}{2}$
	+	+	$x_3 < x_4 < 1$	$x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9+4m}}{2}$
0		0	$x_3 = -2 < 1 = x_4$	$x_3 = -2$
	+	−	$x_3 < 1 < x_4$	$x_3 = \frac{-1-\sqrt{9+4m}}{2}$
$+\infty$				

Kết luận:

− Nếu $m < -\frac{9}{4}$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{-1+\sqrt{9-4m}}{2}$

− Nếu $m = -\frac{9}{4}$, phương trình (1) có nghiệm $x = -\frac{1}{2}; x = \frac{-1+3\sqrt{2}}{2}$

− Nếu $-\frac{9}{4} < m < 0$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{-1 \pm \sqrt{9+4m}}{2}$;

$$x = \frac{-1+\sqrt{9-4m}}{2}$$

− Nếu m = 0, phương trình (1) có nghiệm x = −2; x = 1

− Nếu m > 0, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{-1-\sqrt{9-4m}}{2}$

$$\text{b. } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2+2mx+1 = x+1 \\ x^2+2mx+1 = -x-1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 & (3) \\ \left[\begin{array}{ll} f(x) = x^2+(2m-1)x = 0 & (4) \\ g(x) = x^2+(2m+1)x+2 = 0 & (5) \end{array}\right. \end{cases}$$

* Xét phương trình (4)

Ta có: (4) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 > -1 \\ x_2 = 1 - 2m \end{array}\right.$

$$1 - 2m \geq -1 \Leftrightarrow m \leq 1$$

Như vậy:
- Nếu $m \leq 1$ thì (4) có 2 nghiệm $x = 0$; $x = 1 - 2m$ thoả mãn (3)
- Nếu $m > 1$ thì (4) có 2 nghiệm $x = 0$ thoả mãn (3)

* Xét phương trình (5)

$\Delta = 4m^2 + 4m - 7$

$ag(-1) = 2 - 2m$

$$\frac{S}{2} + 1 = \frac{-2m-1}{2} + 1 = \frac{1-2m}{2}$$

Khi đó ta có bảng sau:

m	Δ	**ag(−1)**	$\frac{S}{2}+1$	**So nghiệm của (5) với − 1**
$-\infty$	+	+	+	$-1 < x_1 < x_2$ $\left(x_{1,2} = \frac{-2m-1 \pm \sqrt{4m^2+4m-7}}{2}\right)$
$\frac{-1-2\sqrt{2}}{2}$	0			$x_1 = x_2 = \sqrt{2} > -1$
	−	+	+	Vô nghiệm
$\frac{1}{2}$			0	
	−	+	−	
$\frac{-1+2\sqrt{2}}{2}$	0			$x_1 = x_2 = -2\sqrt{2} < -1$
	+	+	−	$x_1 < x_2 < -1$
1		0		$x_1 = -1$; $x_2 = -2 < -1$
	+	−	−	$x_1 < -1 < x_2$ $\left(x_2 = \frac{-2m-1-\sqrt{4m^2+4m-7}}{2}\right)$
$+\infty$				

Kết luận:

- Nếu $m < \frac{-1-2\sqrt{2}}{2}$ thì phương trình (2) có nghiệm:

$$x = 0;\ x = 1 - 2m;\ x = \frac{-2m-1 \pm \sqrt{4m^2+4m-7}}{2}$$

– Nếu m = $\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2}$ thì phương trình (2) có nghiệm:

$x = 0;\ x = 2+2\sqrt{2}\ ;\ x = \sqrt{2}$

– Nếu $\dfrac{-1-2\sqrt{2}}{2} < m < \dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ thì phương trình (2) có nghiệm:

$x = 0;\ x = 1-2m$

– Nếu m = $\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2}$ thì phương trình (2) có nghiệm:

$x = 0;\ x = 2 - 2\sqrt{2}$

– Nếu $\dfrac{-1+2\sqrt{2}}{2} < m < 1$ thì phương trình (2) có nghiệm:

$x = 0;\ x = 1 - 2m$

– Nếu m = 1 thì phương trình (2) có nghiệm: $x = 0;\ x = -1$

– Nếu m > 1 phương trình (2) có nghiệm $x = 0$;

$$x = \frac{-2m-1-\sqrt{4m^2+4m-7}}{2}$$

* Đối với một số phương trình chứa dấu trị số tuyệt đối ta có thể sử dụng phương pháp dùng đồ thị hàm số bậc hai để giải.

Chú ý: Khi giải và biện luận phương trình f(x, m) = 0 (1) ta tiến hành

– Biến đổi (1) về dạng $ax^2 = bx + c = h(m)$

– Trên một hệ trục toạ độ ta xét

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c(P) \\ y = h(m)\ (\Delta) \text{ là đường thẳng song song với Ox cắt Oy tại điểm có tung độ } h(m) \end{cases}$$

– Biện luận số giao điểm của (P) và (Δ) là số nghiệm của phương trình (1)

Bài 11: *Tìm m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt*

$$|-2x^2 + 10x - 8| = x^2 - 5x + a \ (1)$$

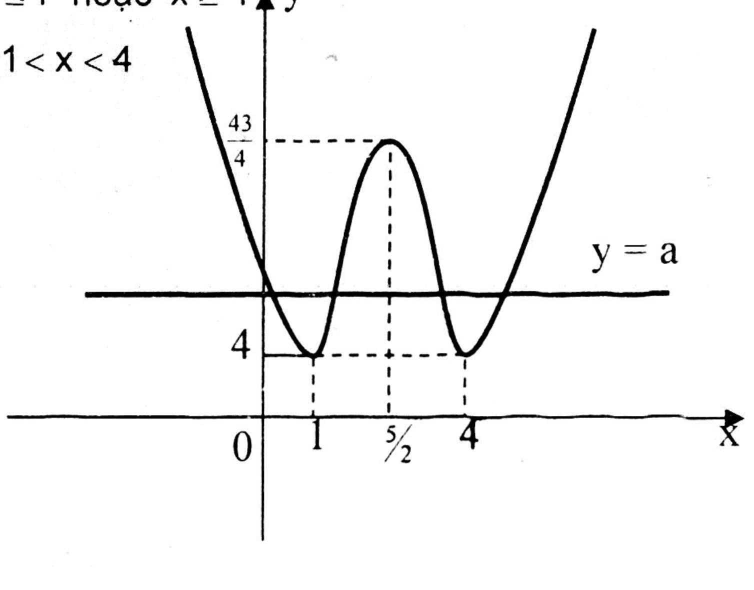
Giải:

Ta có: (1) $\Leftrightarrow |-2x^2 + 10x - 8| - x^2 + 5x = a$

Xét đồ thị $f(x) = |-2x^2 + 10x - 8| - x^2 + 5x$

$$= \begin{cases} x^2 - 5x + 8 & \text{nếu} \quad x \le 1 \text{ hoặc } x \ge 4 \\ -3x^2 + 15x - 8 & \text{nếu} \quad -1 < x < 4 \end{cases}$$

và đường thẳng (Δ): y = a



Vậy để phương trình có 4 nghiệm thì $4 < a < \frac{43}{4}$

Bài 12: *Cho phương trình $x^2 + 2mx + (5m + 2)|x + m| + 5m^2 + 2m = 0$ (1)*

a. Giải phương trình khi $m = -\frac{1}{2}$

b. Tìm m để phương trình có nghiệm

c. Định m để phương trình chỉ có 1 nghiệm

Giải:

Đặt $X = |x + m|$; $X \geq 0$ suy ra $X^2 = x^2 + 2mx + m^2$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow$ $X^2 + (5m + 2)X + 4m^2 + 2m = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = -m \\ X = -4m - 2 \end{array}\right.$$

a. Với $m = -\frac{1}{2}$ suy ra

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} X = \frac{1}{2} \\ X = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \\ \left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$.

b. Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -m \geq 0 \\ -4m - 2 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow m < 0$$

c. Phương trình (1) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -m = 0 \\ -4m - 2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -m \leq 0 \\ -4m - 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 0 \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m = 0$$

Vậy với m = 0 thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài 13: *Giải phương trình*

a. $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3x$ *(1)*

b. $\sqrt{x + 4} - \sqrt{1 - x} = \sqrt{1 - 2x}$ *(2)*

c. $\sqrt{3x^2 - 9x + 1} = |x - 2|$ *(3)*

d. $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1 \qquad (4)$

Giải:

a. (1) $\Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+3x} = 3x-1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 3x-1 \geq 0 \\ x^2+3x = (3x-1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ 8x^2 - 9x + 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{8} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Rightarrow x = 1$$

b. Điều kiện $\begin{cases} x+4 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad -4 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+4} = \sqrt{1-x} + \sqrt{1-2x}$

$\Leftrightarrow x + 4 = 1 - x + 1 - 2x + 2\sqrt{(1-x)(1-2x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(1-2x)} = 2x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ (1-x)(1-2x) = (2x+1)^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ 2x^2 + 7x = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = 0$ (thoả điều kiện $-4 \leq x \leq \dfrac{1}{2}$)

Vậy phương trình có một nghiệm x = 0.

c. (3) $\Leftrightarrow 3x^2 - 9x + 1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

d. Ta có:

$\Leftrightarrow x + 34 - 3\sqrt[3]{(x+34)^2(x-3)} + 3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)^2} - x + 3 = 1$

$\Leftrightarrow 36 = 3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)}\left(\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3}\right)$

Từ đó suy ra: $\sqrt[3]{(x+34)(x-3)} = 12$

$\Leftrightarrow (x + 34)(x - 3) = 12^3 \Leftrightarrow x^2 + 31x - 1830 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 30 \\ x = -61 \end{array}\right.$ (thoả mãn phương trình (4))

Nhận xét:

- Đối với phương trình có chứa nhiều căn bậc hai (như phương trình (2)) thì khi giải ta chú ý đặt điều kiện để tất cả các căn thức đều có nghĩa và để phép biến đổi bình phương hai vế đưa được về một phương trình tương đương ta nên chuyển vế các số hạng của phương trình để được hai vế luôn dương.

- Đối với các phương trình có dạng $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$ *(1) thì ta có thể tiến hành:*

+ Lập phương hai vế của phương trình ta được:

$A \pm B \pm 3\sqrt[3]{A.B}(\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}) = C$ (2)

+ Thế (1) vào (2) và đưa về dạng: $A \pm B - C = \pm 3\sqrt[3]{A.B.C}$

$\Leftrightarrow (A \pm B - C)^3 = \mp 27A.B.C$ (3)

Như vậy, việc giải (1) đưa về giải phương trình hữu tỉ.

- Chú ý: (1) không phải là hằng đẳng thức nên phép thế (1) vào (2) là phép biến đổi không tương đương. Nó chỉ đúng với những giá trị x là nghiệm của phương trình (1). Như vậy phương trình (3) là phương trình hệ quả của (1). Bởi thế khi tìm được các giá trị của x phải thử lại.

Bài 14: *Giải các phương trình:*

a. $2x - x^2 + \sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 0$ (1)

b. $x^2 + \sqrt{x + 5} = 5$ (2)

c. $(4x - 1)\sqrt{x^2 + 1} = 2x^2 + 2x + 1$ (3)

d. $\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x} - \sqrt{(3 + x)(6 - x)} = 3$ (4)

Giải:

a. Đặt $t = \sqrt{6x^2 - 12x + 7}$, $t \geq 0$

Khi đó: $t^2 = 6x^2 - 12x + 7 \Rightarrow 2x - x^2 = \dfrac{7 - t^2}{6}$

(1) $\Leftrightarrow$ $t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 7 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ $6x^2 - 12x + 7 = 49 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + 2\sqrt{2} \\ x = 1 - 2\sqrt{2} \end{array}\right.$

b. Đặt $t = \sqrt{x + 5}$, $t \geq 0$, $t^2 = x + 5$

Khi đó:

$$(2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + t = 5 \\ t^2 - x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 + t = t^2 - x \\ x^2 + t = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x + t)(x - t + 1) = 0 \\ x^2 + t = 5 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} t = -x \geq 0 \\ x^2 - x - 5 = 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} t = x + 1 \geq 0 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x \leq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ x = \dfrac{-1 - \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} \\ x = \dfrac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

c. Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$, $t \geq 1$

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow (4x - 1)t = 2t^2 + 2x - 1$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - (4x - 1)t + 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \quad \text{(loại)} \\ t = 2x - 1 \end{array}\right.$$

Do đó: $\sqrt{x^2 + 1} = 2x - 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 + 1 = 4x^2 - 4x + 1 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{2} \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

d. Đặt $t = (\sqrt{3 + x} + \sqrt{6 - x})$

Suy ra: $\sqrt{(3 + x)(6 - x)} = \dfrac{t^2 - 9}{2}$

Phương trình (4) $\Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với t = −1 ta có: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = -1$ (vô nghiệm)

Với t = 3 ta có: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 6 \\ 9 + 2\sqrt{(3+x)(6-x)} = 9 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 6 \\ \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Nhận xét:

− Đối với các phương trình ở ví dụ 14 mặc dù có một số phương trình vẫn có dạng cơ bản nhưng nếu sử dụng phép luỹ thừa để khử căn thì sẽ biến đổi đưa về một phương trình bậc cao phức tạp vì vậy trong trường hợp đó ta có thể sử dụng phép đặt ẩn phụ để đưa về 1 phương trình hay hệ phương trình đơn giản hơn

− Đối với phương trình (4) ta cũng có thể đưa vào 2 ẩn phụ u = $\sqrt{3+x}$ *và v =* $\sqrt{6-x}$ *và đưa phương trình về hệ* $\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - u.v = 3 \end{cases}$ *và giải hệ ta được u = 0; v = 0 từ đó suy ra giá trị của x*

Bài 15: *Giải và biện luận các phương trình sau theo a:*

a. $x - 1 = \sqrt{a - x^2}$ (1)

b. $\sqrt{x+1} - \sqrt{a-x} = 1$ (2)

Giải:

a. Phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ (x-1)^2 = a - x^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ f(x) = 2x^2 - 2x + 1 - a = 0 \ (3) \end{cases}$$

Ta có: $\Delta' = 2a - 1$; $f(1) = 1 - a$

− Nếu $a < \frac{1}{2}$ thì $\Delta' < 0$ khi đó (3) vô nghiệm. Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

− Nếu $\frac{1}{2} \le a < 1$ thì $\Delta' \ge 0$, $f(1) > 0$, $\frac{S}{2} < 1$ nên phương trình (3) có nghiệm $x_1 \le x_2 < 1$. Vậy phương trình (1) vô nghiệm.

− Nếu $a \ge 1$ thì $f(1) \le 0$.

Khi đó phương trình (3) có nghiệm $x_1 < 1 < x_2$. Vậy phương trình (1) có nghiệm $x = x_2 = \dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$

Tóm lại:

- Với a < 1, phương trình đã cho vô nghiệm.
- Với $a \geq 1$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$

b. Ta có: (2) $\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 1+\sqrt{a-x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq a \\ x+1 = 1+a-x+2\sqrt{a-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq a \\ 2x-a = 2\sqrt{a-x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq a \\ x \geq \dfrac{a}{2} \\ g(x) = 4x^2 - 4(a-1)x + a^2 - 4a = 0 \quad (4) \end{cases}$$

- Nếu a < 0 thì $\dfrac{a}{2} > a$. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu a = 0 thì từ hệ trên suy ra x = 0. Thay x = 0 vào phương trình ta thấy nó thoả mãn.
- Nếu a > 0 thì (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2} \leq x \leq a \\ g(x) = 4x^2 - 4(a-1)x + a^2 - 4a = 0 \quad (4) \end{cases}$

Ta có $f(a) = a^2 > 0$; $f(\dfrac{a}{2}) = -2a < 0$. Do đó phương trình (4) có nghiệm:

$$x_1 < \frac{a}{2} < x_2 < a$$

Từ đó, phương trình có nghiệm $x = x_2 = \dfrac{a-1+\sqrt{2a+1}}{2}$

Tóm lại,

- Với a < 0 phương trình vô nghiệm
- Với $a \geq 0$ phương trình có một nghiệm duy nhất

$$x = \frac{a-1+\sqrt{2a+1}}{2}$$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Giải và biện luận phương trình:

a. $x^4 - 2(m+3)x^2 + m^2 - m = 0$

b. $mx^4 + 2(m-2)x^2 + m + 1 = 0$

Bài 2. Biện luận theo m số nghiệm của phương trình: $x^4 - 2mx^2 + m + 12 = 0$.

Bài 3. Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8$ cắt trục hoành tại 4 điểm A, B, C, D sao cho AB = BC = CD.

Bài 4. Cho phương trình: $(x^2-1)(x+3)(x+5) = m$

a. Giải khi m = 9.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 5. Cho phương trình: $mx^3 - (3m-4)x^2 + (3m-7)x + 3 - m = 0$

a. Giải phương trình khi m = 4.

b. Tìm m để phương trình có 3 nghiệm phân biệt dương.

Bài 6. Cho phương trình: $x^4 - (m+1)x^3 + (m+2)x^2 - (m+1)x + 1 = 0$

a. Giải phương trình khi m = 2.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 7. Cho phương trình: $x^4 + mx^3 + x^3 + mx + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có không ít hơn 2 nghiệm âm khác nhau.

Bài 8. Tìm m để phương trình: $\frac{4x^2}{1+2x^2+x^4} + \frac{2mx}{1+x^2} + 1 - m^2 = 0$ có nghiệm.

Bài 9. Cho phương trình: $(m-2)x^4 - 2mx^3 - (m-5)x + 2mx + m - 2 = 0$

a. Giải phương trình khi m = −1.

b. Tìm m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 10. Cho phương trình: $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2m$

a. Giải phương trình với m = 1.

b. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thuộc (−3,−1).

Bài 11. Giải và biện luận phương trình:

a. $\frac{x}{x-m} + \frac{x-m}{4x} = 1$

b. $\frac{ax+b}{x-a} = \frac{x-b}{x+a}$

c. $\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$

Bài 12. Giải các phương trình:

a. $|x^2+4x| - |x+1| = 2x^2 - 1$

c. $|4x^2 - 4x - 3| = |x^2 - 2x + 4|$

b. $\frac{|x^2-5x+6| - |x^2-2x|}{x+1} = x$

d. $|2x^2 + 3x| = x + 5$

Bài 13. Cho phương trình: $x^2 + 4x + 2|x-1| + m = 0$

a. Giải phương trình khi m = −5.

b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 14. Tìm m để phương trình: $(x - 1)^2 = |x - m|$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 15. Giải và biện luận phương trình:

a. $|2x^2 - (m - 2)x - 3| = 2x - 1$
b. $|x^2 - 2mx + 1 - m| = |x^2 + mx + 1 + 2m|$

Bài 16. Xác định m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt:

$$|x^2 + 2x + m| = x^2 + 3x - 1$$

Bài 17. Tìm a để phương trình: $|-2x^2 + 10x - 8| = x^2 - 5x + a$ có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 18. Giải các phương trình:

a. $x - 2 + \sqrt{3x^2 - 9x + 1} = 0$
b. $\sqrt{3x + 4} - \sqrt{x - 3} = 3$
c. $\dfrac{x^2}{\sqrt{3x - 2}} - \sqrt{3x - 2} = 1 - x$
d. $\sqrt{1 - x} = \sqrt{6 - x} - \sqrt{-5 - 2x}$
e. $x^2 + 2x - \sqrt{2x^2 + 4x + 8} = 20$
f. $\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} - \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$
g. $\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 + 5x + 2}$
h. $\sqrt[3]{x + 5} + \sqrt[3]{x + 6} = \sqrt[3]{2x + 11}$
i. $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11$
k. $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x - 1}$

Bài 19. Cho phương trình: $\sqrt{x + 1} + \sqrt{4 - x} + \sqrt{(x + 1)(4 - x)} = m$

a. Giải phương trình khi m = 5
b. Tìm m để phương trình có nghiệm duy nhất

Bài 20. Cho phương trình: $(x - 3)(x + 1) + 4(x - 3)\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 3}} = m$

a. Giải phương trình khi m = −3.
b. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 21. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $\sqrt{2x^2 + mx - 3} = x - m$.

Bài 22. Giải và biện luận các phương trình:

a. $\sqrt{2x^2 - 2mx + 2m + 3} = x - 1$
b. $\sqrt{x - m} + \sqrt{x + m} = m$

HƯỚNG DẪN - LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

§1. BẤT ĐẲNG THỨC

Bài 1: Dùng hiệu hoặc biến đổi tương đương.

Bài 2: a) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) = (\frac{a^2}{4} - ab + b^2) + (\frac{a^2}{4} - ac + c^2)$

$$+(\frac{a^2}{4} - ad + d^2) + (\frac{a^2}{4} - ae + e^2) = (\frac{a}{2} - b)^2 + (\frac{a}{2} - c)^2 + (\frac{a}{2} - d)^2 + (\frac{a}{2} - e)^2 \geq 0.$$

e) $a^2 + b^2 + c^2 - \sqrt{2}\, a(b + c) = (\frac{a^2}{2} - 2\frac{a}{\sqrt{2}}b + b^2) + (\frac{a^2}{2} - 2\frac{a}{\sqrt{2}}c + c^2)$

$$= (\frac{a}{\sqrt{2}} - b)^2 + (\frac{a}{\sqrt{2}} - c)^2 \geq 0.$$

c) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_n^2 - \frac{2}{\sqrt{n-1}}a_1(a_2 + a_3 + \ldots + a_n)$

$$= (\frac{a_1^2}{n-1} - 2.\frac{a_1}{\sqrt{n-1}}a_2 + a_2^2) + (\frac{a_1^2}{n-1} - 2.\frac{a_1}{\sqrt{n-1}}a_3 + a_3^2)$$

$$+ \ldots + (\frac{a_1^2}{n-1} - 2.\frac{a_1}{\sqrt{n-1}}a_n + a_n^2) =$$

$$(\frac{a_1}{\sqrt{n-1}} - a_2)^2 + (\frac{a_1}{\sqrt{n-1}} - a_3)^2 + \ldots + (\frac{a_1}{\sqrt{n-1}} - a_n)^2 \geq 0.$$

Bài 3: a) Biến đổi tương đương.

b) Bình phương 2 vế.

c) Biến đổi tương đương.

$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \geq (a - b + c)^2 - d^2 = (a - b + c - d)(a - b + c + d)$

$\geq (a - b + c - d)^2.$

f) Biến đổi tương đương.

$$\frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}}\ ;\ \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a\,bc^4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a^3} + \frac{1}{1+b^3} + \frac{1}{1+c^3} + \frac{1}{1+abc} \geq \frac{2}{1+\sqrt{a^3b^3}} + \frac{2}{1+\sqrt{abc^4}} \geq 2.\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{a^3b^3}.\sqrt{abc^4}}}$$

$$= \frac{4}{1+abc}.$$

g) Để ý: $(x - 1)(x - 6) = x^2 - 7x + 6$; $(x - 3)(x - 4) = x^2 - 7x + 12$;

Đặt $t = x^2 - 7x + 6$.

Bài 4: a) Biến đổi tương đương, để ý: $(a_1 - a_2) \leq 0$; $(b_1 - b_2) \leq 0$;

b) HD: $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 \geq a_1b_2 + a_2b_1$;

$(a_2 - a_3)(b_2 - b_3) \geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_2b_2 + a_3b_3 \geq a_2b_3 + a_3b_2$;

$(a_1 - a_3)(b_1 - b_3) \ge 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_1b_1 + a_3b_3 \ge a_1b_3 + a_3b_1$;

c) HD: Tương tự bài b, ta có:

$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \ge 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow a_ib_i + a_jb_j \ge a_ib_j + a_jb_i$ $(i < j)$;...

d) HD: Giả sử: $0 < x \le y \le z \Rightarrow x^5 \le y^5 \le z^5$; $x^9 \le y^9 \le z^9$.

Từ đó: $\dfrac{x+y}{2}.\dfrac{x^5+y^5}{2} \le \dfrac{x^6+y^6}{2} \Leftrightarrow (x+y)(x^5+y^5) \le 2(x^6+y^6)$ và

$(x^6+y^6)(x^9+y^9) \le 2(x^{15}+y^{15})$.

Bài 5: Đặt $\dfrac{a+b}{a-b} = x; \dfrac{b+c}{b-c} = y; \dfrac{c+a}{c-a} = z$;

$$(x+1)(y+1)(z+1) = \frac{2a}{a-b}.\frac{2b}{b-c}.\frac{2c}{c-a} = \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)};$$

$$(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{2b}{a-b}.\frac{2c}{b-c}.\frac{2a}{c-a} = \frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)};$$

$\Rightarrow (x+1)(y+1)(z+1) = (x-1)(y-1)(z-1) \Leftrightarrow xy + yz + zx = -1$;

Mặt khác: $x^2 + y^2 + z^2 \ge -2(xy + yz + zx) = 2 \Rightarrow$ đpcm.

Bài 6: a) Giả sử $0 \le x \le y \le z \le 1 \Rightarrow xy + 1 \le xz + 1$; $xy + 1 \le yz + 1$

$$\Rightarrow \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} \le \frac{x}{xy+1} + \frac{y}{xy+1} + \frac{z}{xy+1} = \frac{x+y+z}{xy+1}$$

$0 \le (1-x)(1-y) \Rightarrow x + y \le xy + 1 \le 2xy + 1 \Rightarrow x + y + z \le 2xy + 1 + 1$

$= 2(xy + 1)$;

$$\Rightarrow \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{zx+1} + \frac{z}{xy+1} \le \frac{x+y+z}{xy+1} \le \frac{2(xy+1)}{xy+1} = 2.$$

b) $(1-x)(1-y) = 1 - x - y + xy > 1 - x - y$

$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) > (1-x-y)(1-z) = 1 - x - y - z + xz + yz > 1 - x - y - z$

$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)(1-t) > (1-x-y-z)(1-t) > 1 - x - y - z - t$ (đpcm)

Bài 7:

a) Giả sử $a \ge 1 \Rightarrow b + c > a \ge 1 \Rightarrow a + b + c > 2$ (trái giả thiết chu vi tam giác bằng 2);

b) $0 < (1-a)(1-b)(1-c) = 1 - (a+b+c) + ab + bc + ca - abc$

$= -1 + ab + bc + ca - abc$

$\Rightarrow \quad ab + bc + ca - 1 > abc$

$2(ab + bc + ca) = (a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 4 - (a^2 + b^2 + c^2)$

$\Rightarrow ab + bc + ca = 2 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \Rightarrow abc < 1 - \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2} \Rightarrow$ đpcm.

c) Đặt $x = 1 - c$; $y = 1 - a$; $z = 1 - b \Rightarrow 0 < x, y, z < 1$; $x + y + z = 1$;

$a = 1 - y$; $b = 1 - z$; $c = 1 - x$;

$$\Rightarrow \frac{ab}{1-c} + \frac{bc}{1-a} + \frac{ca}{1-b} = \frac{(1-y)(1-z)}{x} + \frac{(1-z)(1-x)}{y} + \frac{(1-x)(1-y)}{z};$$

Ta có: $\dfrac{(1-y)(1-z)}{x}=\dfrac{1-(y+z)+yz}{x}=\dfrac{x+yz}{x}$;

$\dfrac{(1-z)(1-x)}{y}=\dfrac{y+xz}{x}$; $\dfrac{(1-x)(1-y)}{z}=\dfrac{z+xy}{z}$;

$\Rightarrow$

$$\frac{ab}{1-c}+\frac{bc}{1-a}+\frac{ca}{1-b}=\frac{x+yz}{x}+\frac{y+xz}{y}+\frac{z+x}{z}=\frac{3xyz+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}{xyz}$$

Và ta chứng minh được: $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq x^2yz+y^2xz+z^2xy=xyz(x+y+z)$ $=xyz$ (đây là bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$).

Bài 8: Giả sử cả 2 bất đẳng thức đều sai: $\begin{cases} c^2<a \\ d^2<b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2-a<0 \\ d^2-b<0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $(c^2-a)+(d^2-b)<0$

$\Rightarrow$ $(c^2+d^2)-(a+b)<0 \Rightarrow c^2+d^2-2cd<0 \Rightarrow (c-d)^2<0$ (vô lí).

Bài 9: Giả sử $a \leq 0$.

Do $abc>0 \Rightarrow a<0$ và $bc<0$;

$ab+bc+ca>0 \Rightarrow a(b+c)>-bc>0 \Rightarrow b+c<0 \Rightarrow a+b+c<0$ (trái giả thiết).

§2. BẤT ĐẲNG THỨC CÔ-SI
BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài 1: a) Sử dụng bất đẳng thức Cô–si cho 2 số không âm:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}=2$$

b) Sử dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm:

$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$; $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\geq 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$ $\Rightarrow$ đpcm.

c) HD: $a+\dfrac{1}{b(a-b)}=b+(a-b)+\dfrac{1}{b(a-b)}$. Sử dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm b, $a-b$, $\dfrac{1}{b(a-b)}$.

d) $a^2+bc\geq 2\sqrt{a^2bc}=2a\sqrt{bc}$; $b^2+ca\geq 2b\sqrt{ca}$; $c^2+ab\geq 2c\sqrt{ab}$ suy ra

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}+\frac{1}{b\sqrt{ca}}+\frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{bc}+\sqrt{ca}+\sqrt{ab}}{abc}$$

$$\le \frac{\frac{b+c}{2}+\frac{c+a}{2}+\frac{a+b}{2}}{2abc}=\frac{a+b+c}{2abc};$$

e) Ta có

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}+1+\frac{c}{a+b}+1-3=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

Đặt x = a +b; y = b +c; z = c +a $\Rightarrow$ x, y, z > 0 và a +b +c = $\frac{x+y+z}{2}$;

$$\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)=\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\ge\frac{9}{2}\text{ (xem bài b);}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2};$$

f) $\frac{2\sqrt{a}}{a^3+b^2}+\frac{2\sqrt{b}}{b^3+c^2}+\frac{2\sqrt{c}}{c^3+a^2}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$a^3+b^2\ge 2\sqrt{a^3b^2}=2ab\sqrt{a}\Rightarrow \frac{2\sqrt{a}}{a^3+b^2}\le\frac{2\sqrt{a}}{2ab\sqrt{a}}=\frac{1}{ab}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$

Tương tự: $\frac{2\sqrt{b}}{b^3+c^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$; $\frac{2\sqrt{c}}{c^3+a^2}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\right)$;

Cộng các vế của các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

Bài 2: a) $1+x\ge 2\sqrt{x}$; $1+y\ge 2\sqrt{y}$; $1+z\ge 2\sqrt{z}$

$\Rightarrow (1+x)(1+y)(1+z)\ge 8\sqrt{xyz}=8$;

b) $1+x^3+y^3\ge 3\sqrt[3]{x^3y^3}=3xy\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}\ge\frac{\sqrt{3xy}}{xy}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}}$;

Tương tự: $\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{yz}}$; $\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{zx}}$;

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}+\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}\right)\ge3\sqrt{3}\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}=3\sqrt{3}$$

Bài 3: a) $x+y+z=1\Rightarrow 1-x=y+z\ge 2\sqrt{yz}$; $1-y=z+x\ge 2\sqrt{zx}$;

$1-z=x+y\ge 2\sqrt{xy}$

b) $1+\frac{1}{x}=1+\frac{x+y+z}{x}=1+1+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}\ge 4\sqrt[4]{\frac{yz}{x^2}}$ (Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 4 số không âm 1, 1, $\frac{y}{x},\frac{z}{x}$);

Tương tự: $1+\frac{1}{y}\ge 4\sqrt[4]{\frac{zx}{y^2}}$; $1+\frac{1}{z}\ge 4\sqrt[4]{\frac{xy}{z^2}}$.

Nhân các vế của các bất đẳng thức trên ta có đpcm.

c) $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{x+y}=\sqrt{\frac{1}{3}(x+y)}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+x+y)$;

Tương tự: $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{y+z}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+y+z)$; $\sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{z+x}\le\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+z+x)$;

$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\right)\le\frac{1}{2}[1+2(x+y+z)]=\frac{3}{2}\Rightarrow$ đpcm.

Bài 4: a) HD: $\sqrt{(p-a)(p-b)}\le\frac{(p-a)+(p-b)}{2}=\frac{c}{2}$; $\sqrt{(p-b)(p-c)}\le\frac{a}{2}$; $\sqrt{(p-c)(p-a)}\le\frac{b}{2}$

b) HD: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}\right)\ge\frac{1}{\sqrt{(p-a)(p-b)}}\ge\frac{2}{(p-a)+(p-b)}\ge\frac{2}{c}\ldots$

c) Sử dụng các công thức: $S=\frac{abc}{4R}$ và $S=pr$, ta có:

$R\ge 2r\Leftrightarrow\frac{abc}{4S}\ge\frac{2S}{p}\Leftrightarrow\frac{S^2}{p}\le\frac{abc}{8}\Leftrightarrow\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\le\frac{abc}{8}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (p-a)(p-b)(p-c)\le\frac{1}{8}abc$ (bất đẳng thức ở câu a)

Bài 5: a) $y=6x(\frac{3}{2}-x)$. GTLN là $\frac{27}{8}$ khi $x=\frac{3}{4}$.

b) HD: $y=acx(\frac{b}{c}-x)$;

Vì $ac>0$ nên y đạt GTLN $\Leftrightarrow$ $x(\frac{b}{c}-x)$ đạt GTLN.

$x\ge 0$ và $\frac{b}{c}-x\ge 0$ và $x+(\frac{b}{c}-x)=\frac{b}{c}$ nên $x(\frac{b}{c}-x)$ có GTLN khi

$x=\frac{b}{c}-x\Leftrightarrow x=\frac{b}{2c}$. Vậy GTLN của hàm số là $\frac{ab^2}{4c}$ khi $x=\frac{b}{2c}$.

c) HD: Viết $y=[x(1-x)]^2$, tìm GTLN của $x(1-x)$;

d) HD: Viết $y = 4.\frac{x}{2}.\frac{x}{2}(1-x)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$.

Bài 6: a) GTNN: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Viết: $y = x+1+\frac{2}{x+1}-1$, tìm GTNN của $x+1+\frac{2}{x+1}$.

c) Viết: $y = x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm $x^2, \frac{1}{x}, \frac{1}{x}$.

d) Viết: $y = \frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{2}{x^2}$. Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm $\frac{x}{2}; \frac{x}{2}; \frac{2}{x^2}$.

e) $y = \frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1} = 1-\frac{x}{x^2+2x+1} = 1-\frac{1}{x+\frac{1}{x}+2}$;

y nhỏ nhất khi $\frac{1}{x+\frac{1}{x}+2}$ lớn nhất $\Rightarrow x+\frac{1}{x}$ bé nhất.

Bài 7: Lời giải bạn Nam đúng.

Lời giải của bạn Việt sai vì $x = \sqrt{2} > 1$ không thuộc miền mà bài toán yêu cầu tìm GTNN của hàm số.

Bài 8: a) $S = \frac{x}{y+1}+\frac{y}{x+1} = \frac{x^2+y^2+1}{xy+2}$;

Vì $x+y=1$ nên $x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy = 1-2xy \Rightarrow x^2+y^2+1 = 2-2xy$

Ta có: $x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow xy \leq \frac{1}{4}$, mà $x \geq 0$, $y \geq 0$ nên $0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$.

Từ đó: $\frac{3}{2} \leq 2-2xy \leq 2$ hay $\frac{3}{2} \leq x^2+y^2+1 \leq 2$; $2 \leq xy+2 \leq \frac{9}{4}$. Vậy: $\frac{2}{3} \leq S \leq 1$;

GTLN của S là 1 khi $\begin{cases} xy = 0 \\ x+y = 1 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 0 \\ x = 0; y = 1 \end{array}\right.$;

GTNN của S là $\frac{2}{3}$ khi $\begin{cases} xy = \frac{1}{4} \\ x + y = 1 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$.

b) $S^2 = (\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y})^2 = \frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} + 2$;

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si:

$\frac{x^2y^2}{z^2} + \frac{y^2z^2}{x^2} \geq 2y^2$; $\frac{y^2z^2}{x^2} + \frac{z^2x^2}{y^2} \geq 2z^2$; $\frac{z^2x^2}{y^2} + \frac{x^2y^2}{z^2} \geq 2x^2$

$\Rightarrow S^2 \geq 1 + 2 = 3 \Rightarrow S \geq \sqrt{3}$;

GTNN của S là $\sqrt{3}$ khi $\begin{cases} \frac{x^2y^2}{z^2} = \frac{y^2z^2}{x^2} = \frac{z^2x^2}{y^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x > 0; y > 0; z > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

c) $S = xyz(x + y)(y + z)(z + x)$;

Áp dụng bất đẳng thức Cô–si cho 3 số không âm: $\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x + y + z}{3} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow xyz \leq \frac{1}{27}$;

$\sqrt[3]{(x + y)(y + z)(z + x)} \leq \frac{x + y + y + z + z + x}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow (x + y)(y + z)(z + x) \leq \frac{8}{27}$

Vậy $S = xyz(x + y)(y + z)(z + x) \leq \frac{8}{729}$;

GTLN của S là $\frac{8}{729}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 9: a) $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 1 + 2xy \leq 1 + x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow |x + y| \leq \sqrt{2}$;

b) Chứng minh: nếu $|x| < 1$; $|y| < 1$ thì $\left|\frac{x - y}{1 - xy}\right| < 1$ (1)

$|x| < 1$; $|y| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$; $-1 < y < 1$; $|xy| < 1 \Rightarrow 1 - xy > 0$, ta xét 2 trường hợp:

+ $x - y > 0$: (1) $\Leftrightarrow \frac{x - y}{1 - xy} < 1 \Leftrightarrow x - y < 1 - xy \Leftrightarrow (x - 1)(y + 1) < 0$ (đúng);

+ $x - y < 0$: (1) $\Leftrightarrow \frac{y - x}{1 - xy} < 1 \Leftrightarrow y - x < 1 - xy \Leftrightarrow (y - 1)(x + 1) < 0$ (đúng);

c) $-\frac{1}{2} \le \frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)} \le \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left|\frac{(a+b)(1-ab)}{(1+a^2)(1+b^2)}\right| \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow |(a+b)(1-ab)| \le \frac{1}{2}(1+a^2)(1+b^2)$;

Ta có: $\frac{1}{2}(1+a^2)(1+b^2) = \frac{1}{2}(1+a^2b^2+a^2+b^2) = \frac{1}{2}[(1-ab)^2+(a+b)^2]$

$\ge |(1-ab)(a+b)|$.

d) $f(x) = ax^2+bx+c$

$|f(0)| = |c| \le 1$; $|f(1)| = |a+b+c| \le 1$; $|f(-1)| = |a-b+c| \le 1$.

$|cx^2-bx+a| = |c(x^2-1)+(a+b+c).\frac{1-x}{2}+(a-b+c).\frac{1+x}{2}| \le$

$\le |c||x^2-1|+|a+b+c|.|\frac{1-x}{2}|+|a-b+c|.|\frac{1+x}{2}| \le |x^2-1|+|\frac{1-x}{2}|$

$+|\frac{1+x}{2}|$

Vì $-1 \le x \le 1$ nên $\frac{1-x}{2} \ge 0$; $\frac{1+x}{2} \ge 0 \Rightarrow |\frac{1-x}{2}|+|\frac{1+x}{2}| = 1$;

Vậy $|cx^2-bx+a| \le |x^2-1|+1 \le |-1|+1 = 2$.

Bài 10: a) $S = |x+10|+|2x+5|+|3x-1992| = |x+10|+|2x+5|+|1992-3x|$

$\ge |x+10+2x+5+1992-3x| = 2007$

Vậy GTNN của S là 2007 khi $x+10$; $2x+5$; $1992-3x$ cùng dấu, chẳng hạn:

$x = 0 \Rightarrow S = 2007$.

b) $0 = 3x^2+y^2+2xy-7x-4y+5$

$= (x^2+y^2+4+2xy-4x-4y)+2(x^2-2\frac{3}{4}x+\frac{9}{16})-\frac{1}{8}$

$= (x+y-2)^2+2(x-\frac{3}{4})^2-\frac{1}{8}$

$\Rightarrow (x+y-2)^2 = \frac{1}{8}-2(x-\frac{3}{4})^2 \le \frac{1}{8} \Rightarrow |x+y-2| \le \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2-\frac{1}{2\sqrt{2}} \le x+y \le 2+\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Vậy GTNN của S là $2-\frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{5}{4}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

GTLN của S là $2+\frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{5}{4}+\frac{1}{2\sqrt{2}}$;

§3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

Bài 1: Bạn đọc tự làm.

Bài 2: HD: g) $\frac{1}{2(x-1)}-\frac{4}{x}+\frac{15}{2(x+1)}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^3-4x^2+6x-4}{x(x-1)(x+1)}\leq 0 \Leftrightarrow$

$\frac{(x-2)(x^2-2x+2)}{x(x-1)(x+1)}\leq 0$

Vì $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$ nên BPT $\Leftrightarrow \frac{x-2}{x(x-1)(x+1)}\leq 0$;

h) $\frac{x+2}{2005}+\frac{x+1}{2006}>\frac{x-1}{2008}+\frac{x-2}{2009}$

$\Leftrightarrow \frac{x+2}{2005}+1+\frac{x+1}{2006}+1>\frac{x-1}{2008}+1+\frac{x-2}{2009}+1$

$\Leftrightarrow \frac{x+2007}{2005}+\frac{x+2007}{2006}>\frac{x+2007}{2008}+\frac{x+2007}{2009}$

$\Leftrightarrow (x+2007)(\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009})>0$

Vì $\frac{1}{2005}>\frac{1}{2008};\frac{1}{2006}>\frac{1}{2009}$ nên $\frac{1}{2005}+\frac{1}{2006}-\frac{1}{2008}-\frac{1}{2009}>0$.
Nghiệm của bất phương trình là $x>-2007$.

Bài 3: a) $(2x-1)\sqrt{3x-2}>0$; ĐK: $3x-2\geq 0\Rightarrow x\geq \frac{2}{3}$;

Khi $x=\frac{2}{3}$: BPT $\Leftrightarrow 0>0$: vô nghiệm;

Khi $x>\frac{2}{3}$, vì $\sqrt{3x-2}>0$ nên BPT $\Leftrightarrow 2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2} \Rightarrow$ Nghiệm: $x>\frac{2}{3}$.

b) $(x+3)\sqrt{(x-2)(2x+1)}\leq 0$; ĐK: $(x-2)(2x+1)\geq 0$

Khi đó: Vì $\sqrt{(x-2)(2x+1)}\geq 0$ nên BPT $\Leftrightarrow x+3\leq 0 \Leftrightarrow x\leq -3$;

Ta thấy $x\leq -3$ thoả đk $(x-2)(2x+1)\geq 0$ nên nghiệm của bất phương trình là $x\leq -3$.

c) $\left(\frac{2x-1}{3}-\frac{x+2}{4}\right)^{2007}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{3}-\frac{x+2}{4}\geq 0$;

d) $\left(\frac{7x+2}{3}+\frac{2-8x}{4}\right)^{2009}<0 \Leftrightarrow \left(\frac{2x+7}{6}\right)^{2009}<0$

Khi $x=-\frac{7}{2}$, ta có: $0<0 \Rightarrow x=-\frac{7}{2}$ không là nghiệm của bất phương trình.

Khi $x \neq -\frac{7}{2}$: $\left(\frac{2x+7}{6}\right)^{2009} < 0 \Leftrightarrow \frac{2x+7}{6} < 0$

Bài 4: HD:

f) $\frac{x-m}{m-3} + x - 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{(m-2)x - 4m + 9}{m-3} > 0$ (1)

Khi $m - 3 > 0 \Rightarrow m > 3$: (1) $\Leftrightarrow (m-2)x - 4m + 9 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{4m-9}{m-2}$;

Khi $m - 3 < 0 \Rightarrow m < 3$: (1) $\Leftrightarrow (m-2)x - 4m + 9 < 0$ (2):

+ $2 < m < 3$: (2) $\Leftrightarrow x < \frac{4m-9}{m-2}$;

+ $m = 2$: (2) $\Leftrightarrow 1 < 0$: vô nghiệm;

+ $m < 2$: (2) $\Leftrightarrow x > \frac{4m-9}{m-2}$;

g) $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ca}{c+a} < a+b+c$

$\Leftrightarrow \frac{x-ab}{a+b} - c + \frac{x-bc}{b+c} - a + \frac{x-ca}{c+a} - b < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - ab - bc - ca)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) < 0$;

Rõ ràng $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \neq 0$

Khi $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} > 0$: BPT $\Leftrightarrow x < ab + bc + ca$;

Khi $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} < 0$: BPT $\Leftrightarrow x > ab + bc + ca$;

h) $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ca} + \frac{x-c}{ab} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{ax-a^2}{abc} + \frac{bx-b^2}{bca} + \frac{cx-c^2}{cab} \geq \frac{2(bc+ca+ab)}{abc}$

$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)x - (a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)}{abc} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{abc}x \geq \frac{(a+b+c)^2}{abc}$.

Bài 5: a) ĐS: $\frac{23}{34} < x < \frac{8}{3}$; b) $x \leq \frac{22}{21}$.

Bài 6: a) $\begin{cases} 3x - 1 < x + 4 & (1) \\ (m-1)x + 2 > 2x + 3 & (2) \end{cases}$

Giải (1) ta có $x < \frac{5}{2}$;

(2) $\Leftrightarrow (m-3)x > 1$ (3)

+ $m > 3$: (3) $\Leftrightarrow x > \frac{1}{m-3}$. Để hệ có nghiệm thì $\frac{1}{m-3} < \frac{5}{2} \Leftrightarrow m > \frac{17}{5}$

Kết hợp đk $m > 3$, ta có $m > \frac{17}{5}$; (*Chú ý* $m - 3 > 0$)

+ $m = 3$: (3) $\Leftrightarrow 0 > 1$: vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm;

+ $m < 3$: (3) $\Leftrightarrow x < \frac{1}{m-3}$: hệ luôn có nghiệm.

Vậy với $m > \frac{17}{5}$ hoặc $m < 3$ thì hệ bất phương trình có nghiệm.

b) $\begin{cases} 2mx - 1 < 2 - x & (1) \\ mx + 2 > x + 3 & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow (2m+1)x < 3$ (1'); (2) $\Leftrightarrow (m-1)x > 1$ (2')

Xét các trường hợp:

+ $m < -\frac{1}{2}$: (1') $\Leftrightarrow x > \frac{3}{2m+1}$; (2') $\Leftrightarrow x < \frac{1}{m-1}$. Để hệ có nghiệm thì

$\frac{3}{2m+1} < \frac{1}{m-1} \Leftrightarrow 3(m-1) < 2m+1 \Leftrightarrow m < 4$. Kết hợp đk $m < -\frac{1}{2}$,

ta có: $m < -\frac{1}{2}$;

(*Chú ý:* $2m + 1 < 0$; $m - 1 < 0$);

+ $m = -\frac{1}{2}$: (1') $\Leftrightarrow 0 < 3$: thoả với mọi x; (2') $\Leftrightarrow -\frac{3}{2}x > 1 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$.

Vậy hệ có nghiệm $x < -\frac{2}{3}$.

+ $-\frac{1}{2} < m < 1$: (1') $\Leftrightarrow x < \frac{3}{2m+1}$; (2') $\Leftrightarrow x < \frac{1}{m-1}$: hệ luôn có nghiệm;

+ $m = 1$: (2') $\Leftrightarrow 0 > 1$: vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm;

+ $m > 1$: (1') $\Leftrightarrow x < \frac{3}{2m+1}$; (2') $\Leftrightarrow x > \frac{1}{m-1}$. Để hệ có nghiệm thì

$\frac{1}{m-1} < \frac{3}{2m+1} \Leftrightarrow 2m+1 < 3m-3 \Leftrightarrow m > 4$. Kết hợp đk $m > 1$, ta có: $m > 4$;

Vậy với $m < 1$ hoặc $m > 4$ thì hệ bất phương trình có nghiệm.

§4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

Bài 1: HD:

d) $D = (4x-7)^2 - (6x-1)^2 = (4x-7+6x-1)(4x-7-6x+1) = (10x-8)(-2x-6)$;

e) $E = \dfrac{-3}{2x+5} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{-x+8}{(2x+5)(x-1)}$;

f) $F = (x-1)(2x^2+5x-3) = (x-1)(x+3)(2x-1)$;

Bài 2: HD: Lập bảng xét dấu chung cho các nhị thức.

b) $x^2 - 8 + 2(x-2)^2 = x^2 + 2[(x-2)^2 - 4] = x^2 + 2x(x-4) = x(3x-8)$;

d) $4 + \dfrac{(x-3)^2}{5} \geq (x-1)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 - \dfrac{(x-3)^2}{5} \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) - \dfrac{(x-3)^2}{5} \leq 0 \qquad \Leftrightarrow (x-3)(x+1-\dfrac{x-3}{5}) \leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(4x+8)}{5} \leq 0$;

f) Chú ý $x^2 + 7 > 0$ với mọi x;

g) $\dfrac{2x-5}{6x+3} > \dfrac{6x+3}{2x-5} \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{6x+3} - \dfrac{6x+3}{2x-5} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(2x-5)^2-(6x+3)^2}{(2x-5)(6x+3)} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{(8x-2)(-4x-8)}{(2x-5)(6x+3)} > 0$;

Bài 3: a) $2x - m = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{m}{2}$; $\qquad x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$;

Xét các trường hợp: 1) $\dfrac{m}{2} < -6 \Leftrightarrow m < -12$; $\qquad$ 3) $\dfrac{m}{2} > -6 \Leftrightarrow m > -12$;

2) $\dfrac{m}{2} = -6 \Leftrightarrow m = -12$;

và xét dấu của $(2x - m)(x + 6)$ trong từng trường hợp.

b) Xét các trường hợp: $m < -\dfrac{4}{3}$; $m = -\dfrac{4}{3}$; $m > -\dfrac{4}{3}$;

c) Xét các trường hợp: 1) m = 0: BPT $\Leftrightarrow -2(4x+2) \leq 0$;

2) m > 0: $3mx - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3m}$; $4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$,

Do m > 0 nên $\dfrac{2}{3m} > 0 > -\dfrac{1}{2}$. Lập bảng xét dấu chung cho $(3mx-2)$ và $4x+2$;

3) m < 0: $3mx - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3m}$; $4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$,

Xét các trường hợp: $\dfrac{2}{3m} < -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3m} = -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3m} > -\dfrac{1}{2}$.

Lập bảng xét dấu chung cho $3mx - 2$ và $4x + 2$;

d) Xét các trường hợp: $-\frac{m}{3} < -7$; $-7 < -\frac{m}{3} < 5$; $-\frac{m}{3} = 5$; $5 < -\frac{m}{3}$.

Xét dấu $\frac{(3x+m)(x-5)}{x+7}$ trong từng trường hợp.

Bài 4: a) ĐK $x \neq -1$. Đưa PT về dạng: $(4-m)x = m-2 \Rightarrow x = \frac{m-2}{4-m}$ $(m \neq 4)$;

Để PT có nghiệm dương thì $\begin{cases} \frac{m-2}{4-m} \neq -1 \quad (1) \\ \frac{m-2}{4-m} > 0 \quad (2) \end{cases}$;

$(1) \Leftrightarrow -1 + \frac{2}{4-m} \neq -1$, với mọi m; giải (2), ta có: $2 < m < 4$.

b), c) Bạn đọc làm tương tự.

Bài 5: HD: c) $|x - |x-1|| \geq 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - |x-1| \leq -3 \\ x - |x-1| \geq 3 \end{array}\right.$;

e) $\left|\frac{3}{2x-1}\right| > \left|\frac{-6}{x+3}\right| \Rightarrow |x+3| > 2|2x-1|$;

f) $\left|\frac{x-2}{3x+1}\right| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \frac{x-2}{3x+1} \leq 3$;

g) $\sqrt{x(x-2)+2(3x+2)} = \sqrt{x^2+4x+4} = |x+2|$;

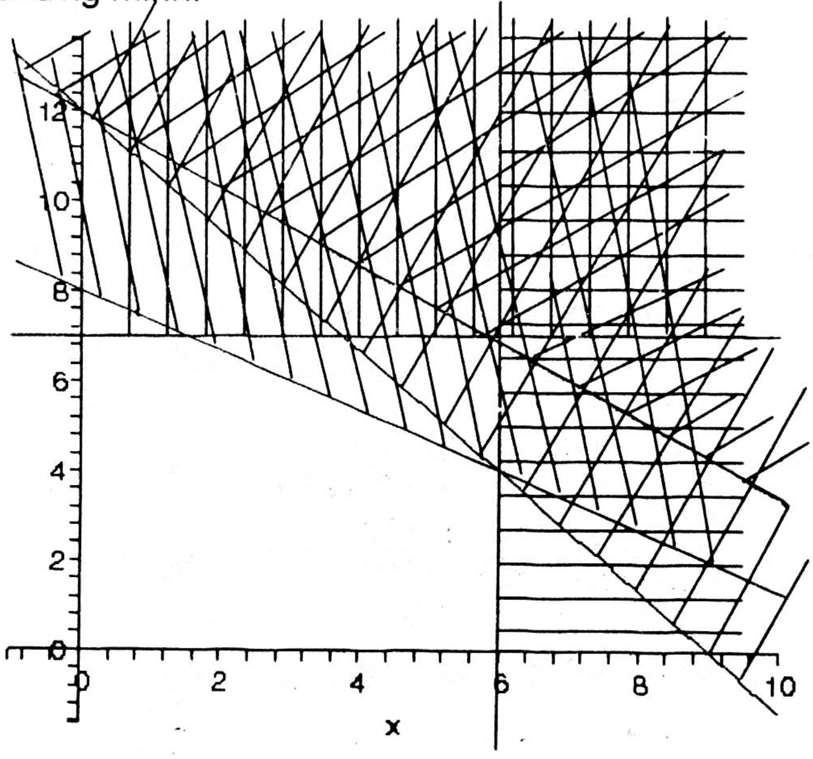
h) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} = |\sqrt{x-1}-1|$

Bài 6: HD: Chia khoảng để chứng minh.

§5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1, Bài 2: HD: Bạn đọc hãy đọc kĩ phần bài tập mẫu để làm các bài tập này.

Bài 3: Miền nghiệm như hình bên:



Các đỉnh của đa giác nghiệm là:

(0; 0), (0; 7), $(\frac{3}{2}; 7)$; (6; 4), (6; 0)

Tính giá trị của F tại các đỉnh trên ta sẽ tìm được

giá trị lớn nhất và nhỏ nhất
theo yêu cầu.

Bài 4: Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại A, B sản xuất được.
Khi đó: Lượng nguyên liệu loại I đã sử dụng là: $2x + y$;
Lượng nguyên liệu loại II đã sử dụng là: $6y$;
Lượng nguyên liệu loại III đã sử dụng là: $4x$;
Tổng số lãi là: $3x + 5y$;
Theo điều kiện bài toán thì x, y phải thoả mãn hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + y \le 8 \\ 6y \le 24 \\ 4x \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Bài toán trở thành: Tìm x, y thoả hệ trên và làm cho $F = 3x + 5y$ lớn nhất.
(Làm tương tự Bài 3).

§6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1: HD: e) Để ý $x^2 - 10x + 25 > 0$ với mọi $x \neq 5$;

f) $\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2 - x + 1} < \frac{1-2x}{x^3+1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} < 0$; chú ý: $x^2 - x + 1 > 0$, với mọi x.

Bài 2: HD: Hãy xem lại phần phương trình quy về bậc hai ở chương 3.

a) Đặt $X = x^2$, $X \ge 0$;(Dạng trùng phương)

b) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) < 384 \Leftrightarrow (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) - 384 < 0$.
Đặt: $X = x^2 + 8x + 7$.

c) Đặt $X = 6x^2 - 7x$;

d) $x^2 + (x+1)^2 > \frac{15}{x^2 + x + 1} \Leftrightarrow 2(x^2 + x + 1) - 1 > \frac{15}{x^2 + x + 1}$. Đặt $X = x^2 + x + 1$;

e) $x^2 - 5\sqrt{x^2+1} < -5 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 5\sqrt{x^2+1} + 4 < 0$. Đặt $X = \sqrt{x^2+1}$, $X > 0$;

f) $x = 0$ không là nghiệm của bất phương trình.
$x \neq 0$: Chia 2 vế cho $x^2 > 0$: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 < 0$. Đặt $X = x + \frac{1}{x}$;
$|X| \ge 2$;
(Dạng đối xứng);

g) $(2x^2 + x)^2 > 3 - 2x(2x + 1) \Leftrightarrow [x(2x + 1)]^2 + 2x(2x + 1) - 3 > 0$.
Đặt $X = x(2x + 1)$;

h) Để ý: $2x^2 - 6x + 1 = 2(x^2 - 3x + 2) - 3$. Đặt $X = x^2 - 3x + 2$;

i) Đặt $X = x - 2 \Rightarrow X^2 - 4 = x^2 - 4x$;

j) Đặt $X = x + 2$;

Bài 3: Bạn đọc tự giải.

Bài 4: $mx^2 - 2(m - 1)x + m - 3 = 0$ (1)

a) Để (1) có 2 nghiệm trái dấu thì $P = \dfrac{m-3}{m} < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 3$;

b) Để (1) có 2 nghiệm dương thì: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} > 0 \end{cases}$;

c) Để (1) có 2 nghiệm âm thì: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 > 0 \\ \dfrac{m-3}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m-1)}{m} < 0 \end{cases}$;

Bài 5: Đặt $X = x^2$; $X \geq 0$. PT $\Leftrightarrow X^2 + (1 - 2a)X + a^2 - 1 = 0$.
Đặt $f(X) = X^2 + (1 - 2a)X + a^2 - 1$.

a) PT vô nghiệm $\Leftrightarrow$ f(X) = 0 vô nghiệm hoặc f(X) = 0 có hai nghiệm âm.

* f(X) = 0 vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = (1 - 2a)^2 - 4(a^2 - 1) = 5 - 4a < 0 \Leftrightarrow a > \dfrac{5}{4}$;

* f(X) = 0 có hai nghiệm âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \ldots \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a < -1$;

Vậy PT vô nghiệm khi $a > \dfrac{5}{4}$ hoặc $a < -1$;

b) PT có đúng 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ f(X) = 0 có một nghiệm $X_1 = 0$, còn nghiệm kia $X_2 < 0$.
ĐS: $a = -1$;

c) PT có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ f(X) = 0 có đúng 1 nghiệm dương $\Leftrightarrow$ f(X) = 0 có 2 nghiệm trái dấu hoặc f(X) = 0 có nghiệm kép dương.

ĐS: $-1 < a < 1$ hoặc $a = \dfrac{5}{4}$;

d) PT có đúng 3 nghiệm $\Leftrightarrow$ f(X) = 0 có 2 nghiệm $X_1 = 0$ và $X_2 > 0$.
ĐS: $a = 1$.

e) PT có đúng 4 nghiệm $\Leftrightarrow$ f(X) = 0 có 2 nghiệm dương phân biệt.

ĐS: $1 < a < \dfrac{5}{4}$;

f) PT có 4 nghiệm $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ thoả mãn $2x_2 = x_1 + x_3 \Leftrightarrow f(X) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $X_1 < X_2$ và $\sqrt{X_2} = 3\sqrt{X_1}$;
(Vì 4 nghiệm PT là: $-\sqrt{X_2} < -\sqrt{X_1} < \sqrt{X_1} < \sqrt{X_2}$);

f(X) = 0 có 2 nghiệm dương phân biệt (đã tìm ở câu *e*): $1 < a < \frac{5}{4}$;

$$\sqrt{X_2} = 3\sqrt{X_1} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2a-1+\sqrt{5-4a}}{2}} = 3\sqrt{\frac{2a-1-\sqrt{5-4a}}{2}}.$$

Giải pt này ta có: $a = \dfrac{-9 \pm 5\sqrt{73}}{32}$

Vậy $a = \dfrac{-9 + 5\sqrt{73}}{32}$.

Bài 6: $\begin{cases} x^2 + 7x - 8 < 0 & (1) \\ k^2x + 1 > 3 + (3k-2)x & (2) \end{cases}$ (1) $\Leftrightarrow -8 < x < 1$; (2) $\Leftrightarrow (k^2 - 3k + 2)x > 2$

Khi k = 1 hoặc k = 2: (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ hệ vô nghiệm.

Khi k < 1 hoặc k > 2: (2) $\Leftrightarrow x > \dfrac{2}{k^2 - 3k + 2}$.

Hệ vô nghiệm khi $\dfrac{2}{k^2 - 3k + 2} \geq 1$.

Khi 1< k < 2: (2) $\Leftrightarrow x < \dfrac{2}{k^2 - 3k + 2}$. Hệ vô nghiệm khi $\dfrac{2}{k^2 - 3k + 2} \leq -8$.

Bài 7: Bạn đọc tự làm.

Bài 8: a) Để ý: $x^2 + x + 1 > 0$ với mọi x:

$$9 < \frac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 6 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} > -9 \\ \dfrac{3x^2 - mx - 6}{x^2 + x + 1} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 - (m-9)x + 3 > 0 \\ 3x^2 + (m+6)x + 12 > 0 \end{cases}$$

Ta định m để $12x^2 - (m-9)x + 3 > 0$ và $3x^2 + (m+6)x + 12 > 0$ với mọi x.

b) $\left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| < 2 \Leftrightarrow -2 < \left|\dfrac{x^2 + mx + 1}{x^2 + 1}\right| < 2$.

Bài 9: Bạn đọc nên lập bảng để giải các bài tập này.

Bài 10: $\dfrac{ax - a(1-a)}{a^2 - ax - 1} \Rightarrow [ax - a(1-a)](a^2 - ax - 1) > 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + a(1-a)x - (1-a)^2$
$(a + a^2) < 0$

Bạn đọc hãy giải và biện luận bất phương trình này.

Bài 11: b) $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{-x^2 + x - 1} = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{x^2 - x + 1}$.

§7. ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

Bài 1: c) Để ý $m^2 + 3 > 0$, với mọi m;

d) Lập bảng xét dấu chung của:

$\Delta' = -3m^2 - 8m - 4$; $af(-1) = (m + 1)(7m + 5)$; $\dfrac{S}{2} + 1 = \dfrac{2m + 1}{m + 1}$

Bài 2:

a) $\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 7m + 6 \ge 0 \\ 13m + 3 > 0 \\ -m - 3 < 0 \end{cases}$

b) $\text{ycbt} \Leftrightarrow af(2) < 0$;

c) $\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ af(2) > 0 \\ \dfrac{S}{2} - 2 > 0 \end{cases}$

Bài 3: a) $a > 1$; b) $-\dfrac{7}{2} < a \le -3$; c) $-\dfrac{16}{7} \le a < -1$;

d) Để ý: $a^2 + a + 1 > 0$, với mọi a; ĐS: $-2 - \sqrt{11} < a < -2 + \sqrt{11}$;

e) $2\sqrt{2} \le a < \dfrac{11}{3}$;

f) Ta tìm a để phương trình có nghiệm $x_1 \le x_2$:

$|x_1| < 2$ và $|x_2| < 2 \Leftrightarrow -2 \le x_1 \le x_2 \le 2$. ĐS: $-\dfrac{3}{4} \le a \le \dfrac{3}{4}$;

g) Ta tìm a để phương trình có nghiệm x_1, x_2 thoả 1 trong các trường hợp sau:

1) $-2 < 2 < x_1 \le x_2$;
2) $x_1 < -2 < 2 < x_2$;
3) $x_1 \le x_2 < -2 < 2$;

Bài 4: a) $af(1) < 0$; b) $af(-2) < 0$; c) $af(-1) < 0$;

d) $af(m) < 0$; e) $f(-3)f(3) < 0$; f) $f(2)f(3) < 0$;

g) $f(1)f(2) < 0$;

h) $\dfrac{a^2}{x - p} + \dfrac{b^2}{x - q} = 1 \Rightarrow (x - p)(x - q) - a^2(x - q) - b^2(x - p) = 0$;

$$f(p)f(q) < 0;$$

Bài 5: c) $-1 \le x_1 \le x_2 \le 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \\ -1 < \dfrac{S}{2} < 1 \end{cases}$

d) $x^2 - 4 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 2 \end{array}\right.$

ycbt $\Leftrightarrow$ PT có nghiệm $x_1 \le x_2$ thoả $x_1 \le x_2 \le -2$ hoặc $2 \le x_1 \le x_2$;

Bài 6: Bạn đọc tự làm.

Bài 7: $\dfrac{mx - m + m^2}{m^2 + 1 - mx} > 0$ đúng với mọi $x \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow f(x) = (mx - m + m^2)(m^2 + 1 - mx) > 0$ đúng với mọi $x \in [0; 1]$

$\Leftrightarrow m^2x^2 - (m^2 + m)x + m(1 - m)(m^2 + 1) < 0$ đúng với mọi $x \in [0; 1]$.

ĐS: $m < 0$ hoặc $m > 1$.

Bài 8: a) Đặt $X = x^2$; $X \ge 0$

$(m - 1)x^4 + 2mx^2 - 3m + 2 \le 0 \Leftrightarrow (m - 1)X^2 + 2mX - 3m + 2 \le 0$

Ta tìm giá trị của m sao cho bất phương trình có nghiệm $X \ge 0$.

b) $(x + 1)(x + 3)(x^2 + 4x + 6) \ge m \Leftrightarrow (x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) \ge m$

Đặt $X = x^2 + 4x + 3 = (x + 2)^2 - 1 \ge -1$: BPT $\Leftrightarrow X^2 + 3X - m \ge 0$

Ta tìm giá trị của m sao cho bất phương trình có nghiệm $X \ge -1$.

c) $x = 0$ không phải là nghiệm của bất phương trình. Chia 2 vế cho x^2:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2m\left(x + \frac{1}{x}\right) + m < 0;$$

Đặt $X = x + \dfrac{1}{x}$; $|X| \le 2$: BPT $\Leftrightarrow X^2 + 2mX + m - 2 < 0$

d) Đặt $X = 2x^2 - x = 2(x - \dfrac{1}{4})^2 - \dfrac{1}{8} \ge -\dfrac{1}{8}$

Bài 9: Tìm k để phương trình $x^4 - 4x^3 + 8x = k$ có 4 nghiệm phân biệt

$x^4 - 4x^3 + 8x = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x^2 + 8x = (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x)$;

ycbt $\Leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - 4(x^2 - 2x) - k = 0$. Đặt $X = x^2 - 2x \ge -1$;

ycbt $\Leftrightarrow f(X) = X^2 - 4X - k = 0$ có 2 nghiệm phân biệt > -1;

ĐS: $-4 < k < 5$.

Bài 10: $-1 \le m \le 5$.

§3 PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Bài 1 Bạn đọc tự giải

Bài 2 Đặt $x^2 = t \ge 0$, phương trình đã cho trở thành $t^2 - 2mt + m + 12 = 0$ (*)

Ta có: $t > 0$ thì $x = \pm\sqrt{t}$

$t = 0$ thì $x = 0$

Để biện luận số nghiệm của phương trình đã cho ta quy về xét dấu các nghiệm của (*)

Ta có: $\Delta = m^2 - m - 12$; $P = m + 12$; $S = 2m$

m	Δ	P	S	Dấu các nghiệm của phương trình (*)	Số nghiệm của phương trình đã cho
$-\infty$					
	+	−	−	$x_1 < 0 < x_2$	2
−12		0		$x_1 < x_2 = 0$	1
	+	+	−	$x_1 < x_2 < 0$	0
−3	0			$x_1 = x_2 = -3 < 0$	0
	−	+	−		
0			0	Vô nghiệm	0
	−	+	+		
4	0			$x_1 = x_2 = 4 > 0$	2
	+	+	+	$0 < x_1 < x_2$	4
$+\infty$					

Bài 3 Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

$$x^4 - 2(m + 4)x^2 + m^2 + 8 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = t \geq 0 \\ t^2 - 2(m+4)t + m^2 + 8 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

− Trước hết, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 8 > 0 \\ m^2 + 8 > 0 \\ 2(m+4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

− Với $m > -1$ thì (2) có 2 nghiệm $0 < t_1 < t_2$ khi đó các nghiệm của (1) là:

$$x_A = -\sqrt{t_2} < x_B = -\sqrt{t_1} < x_C = \sqrt{t_1} < x_D = \sqrt{t_2}$$

Vì AB = BC = CD nên $\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1} = 2\sqrt{t_1} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$

Mặt khác, theo viete ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+4) \\ t_1.t_2 = m^2 + 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10t_1 = 2(m+4) & (3) \\ 9t_1^2 = m^2 + 8 & (4) \end{cases}$

(3) $\Rightarrow t_1 = \dfrac{m+4}{5}$. Thay vào (4) ta được $16m^2 - 72m + 56 = 0$

$$\Leftrightarrow m = 1;\ m = \frac{7}{2}$$

Như vậy, với $m = 1$; $m = \dfrac{7}{2}$ thì phương trình có nghiệm thoả mãn yêu cầu bài ra.

Bài 4 $(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$ (1)

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) - m = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = x^2 + 4x - 5 \\ t^2 + 8t - m = 0 \quad (2) \end{cases}$

– Với m = 9. Đáp số: $x = -2$; $x = -2 - \sqrt{10}$; $x = -2 + \sqrt{10}$

– Ta có: $t = x^2 + 4x - 5 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 - t = 0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = 9 + t \geq 0$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \geq -9$.

Xét (2): $\Delta' = 16 + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -16$

Suy ra: $t_1 = -4 - \sqrt{m + 16}$; $t_2 = -4 + \sqrt{m + 16}$

Ta có: $-4 - \sqrt{m + 16} \geq -9 \Leftrightarrow m \leq 9$

$-4 + \sqrt{m + 16} \geq -9 \Leftrightarrow m \geq -16$

Vậy, giá trị m cần tìm là $m \geq -16$

Bài 5 $mx^3 - (3m - 4)x^2 + (3m - 7)x + 3 - m = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (x - 1)[mx^2 - (2m - 4)x + m - 3] = 0$

a. Đáp số: $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$

b. Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt dương khi phương trình $f(x) = mx^2 - 2(m - 2)x + m - 3$ (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 4 - m > 0 \\ \dfrac{m - 3}{m} > 0 \\ \dfrac{2(m - 2)}{m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } 3 < m < 4$$

Bài 6 $x^4 - (m + 1)x^3 + (m + 2)x^2 - (m + 1)x + 1 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - (m + 1)(x + \frac{1}{x}) + m + 2 = 0$ (vì x = 0 không là nghiệm của phương trình)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{1}{x} = t \quad (|t| \geq 2 \text{ vì } |t| = |x + \dfrac{1}{x}| = |x| + \dfrac{1}{|x|} \geq 2) \\ t^2 - (m + 1)t + m = 0 \quad (2) \end{cases}$$

– Với $m = 2 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (loại); $t = 2$

$\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$

– Ta có: (2) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (loại)} \\ t = m \end{array}\right.$

Để phương trình đã cho có nghiệm thì $|m| \geq 2$

Bài 7 $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0 \quad (1)$

Ta có x = 0 không phải là nghiệm của (1). Chia cả 2 vế của (1) cho x^2:

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + m(x + \frac{1}{x}) + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = t, \quad |t| \geq 2 \\ f(t) = t^2 + mt - 1 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta nhận thấy $\forall m$ thì (2) luôn có 2 nghiệm trái dấu $t_1 < 0 < t_2$

Ta có, nếu phương trình $x + \frac{1}{x} = t_2$ có nghiệm thì mọi nghiệm đều dương.

Vậy, để phương trình đã cho có không ít hơn 2 nghiệm âm khác nhau thì phương trình $x + \frac{1}{x} = t_2$ có 2 nghiệm âm khác nhau, tức là $t_1 < -2$

Như vậy, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để (2) có 2 nghiệm:

$$t_1 < -2 < 0 < t_2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(0) = -1 < 0 \\ f(-2) = -2m + 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Bài 8 $\frac{4x^2}{1+2x^2+x^4} + \frac{2mx}{1+x^2} + 1 - m^2 = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2 + m\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) + 1 - m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2x}{1+x^2}\left(|t| = \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1 \text{vì } 1 + x^2 - 2|x| = (1-|x|)^2 \geq 0 \text{nên } 2|x| \leq 1 + x^2\right) \\ f(t) = t^2 + mt + 1 - m^2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Vậy, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để phương trình (2) có nghiệm $\in [-1, 1]$. Tức là:

$$\left[\begin{array}{l} \text{(2) có 1 nghiệm } \in [-1, 1] \\ \text{(2) có nghiệm } -1 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-1).f(1) \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \\ -1 \leq \frac{S}{2} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq m \leq -1 \text{ hoặc } 1 \leq m \leq 2 \\ \begin{cases} 5m^2 - 4 \geq 0 \\ -m^2 - m + 2 \geq 0 \\ -m^2 + m + 2 \geq 0 \\ -1 \leq -\frac{m}{2} \leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 \leq m \geq -1 \quad \text{hoặc} \quad 1 \leq m \leq 2 \\ -1 \leq m \leq -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ hoặc } \frac{2}{\sqrt{5}} \leq m \leq 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad -2 \le m \le -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{ hoặc } \frac{2}{\sqrt{5}} \le m \le 2$$

Bài 9

$$(m-2)x^4 - 2mx^3 - (m-5)x + 2mx + m - 2 = 0 \ (1)$$

$$\Leftrightarrow (m-2)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2m\left(x - \frac{1}{x}\right) - m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = t & \left(t \in R \text{ vì ta có } x - \dfrac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx - 1 = 0 \text{ có}\right. \\ & \left.\text{nghiệm với } \forall t) \text{ do } \Delta = t^2 + 4 > 0 \ \forall t\right. \\ (m-2)t^2 - 2mt + m + 1 = 0 \ (2) & \end{cases}$$

a. Với $m = -1$

$$(2) \Leftrightarrow -3t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 1 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \end{array}\right.$$

b. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt ⇔ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m - 2 \ne 0 \\ \Delta = m + 2 > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow -2 < m \ne 2$$

Bài 10 $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 2m$ (1)

Đặt $t = x + \dfrac{1+3}{2} = x + 2$. Suy ra $\begin{cases} x + 1 = t - 1 \\ x + 3 = t + 1 \end{cases}$

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow (t-1)^4 + (t+1)^4 = 2m \Leftrightarrow t^4 + 6t^2 + 1 - m = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 = u \ge 0 \\ f(u) = u^2 + 6u + 1 - m = 0 \ (2) \end{cases}$$

a. Với $m = 1$ (tự giải)

Đáp số: $x = -2$

b. Ta có: $-3 < x < -1 \Leftrightarrow -1 < x + 2 < 1 \Leftrightarrow -1 < t < 1$

$\Leftrightarrow |t| < 1 \Leftrightarrow t^2 < 1 \Leftrightarrow u < 1$

Vậy (1) có 2 nghiệm phân biệt $\in (-3, -1)$

$\Leftrightarrow$ (2) có 1 nghiệm $\in (0, 1) \Leftrightarrow f(0).f(1) < 0 \Leftrightarrow (1 - m)(8 - m) < 0$

$\Leftrightarrow 1 < m < 8$

Bài 11 Bạn đọc tự giải

a. Đáp số: $m = 0$ phương trình vô nghiệm

$m \ne 0$ phương trình có hai nghiệm $x_{1,2} = 3m \pm \sqrt{8m^2}$

b. Đáp số:

$a = 0$ và $b \neq 0$ phương trình có nghiệm $x = 2b$

$a = b = 0$ phương trình vô nghiệm

$a = 1$ và $b \neq -1$ phương trình có nghiệm $x = 0$

$a = 1$ và $b = -1$ phương trình có nghiệm $\forall x \neq \pm 1$

$a \neq 1$ và $a \neq 0$ thì:

+ Với $b \neq -a^2$, $b \neq -a$ phương trình có 2 nghiệm

$$x = 0;\ x = \frac{a^2 + a + 2b}{1 - a}$$

+ Với $b = -a^2$ hoặc $b = -1$ phương trình có 1 nghiệm $x = 0$

c. Đáp số:

$a = b = c$ phương trình có nghiệm $\forall\ x$

$a = 0$; $b \neq 0$ phương trình có nghiệm $\forall\ x \neq \frac{1}{b}$

$a \neq 0$, $b = 0$ phương trình có nghiệm $\forall\ x \neq \frac{1}{a}$

$a \neq 0$; $b \neq 0$

+ Với $a + b = 0$ hoặc $a = b$ phương trình có nghiệm $x = 0$

+ Với $a + b \neq 0$ hoặc $a \neq b$ phương trình có nghiệm $x = 0$; $x = \frac{2}{a + b}$

Bài 12

Bạn đọc tự giải

a. Đáp số: $x = \frac{-3 - \sqrt{33}}{6}$; $x = 0$; $x = 3$

b. Đáp số: $x = -2 - \sqrt{10}$; $x = 4 - \sqrt{10}$

c. Đáp số: $x = \frac{1}{5}$; $x = 1$; $x = \frac{1 - \sqrt{22}}{3}$; $x = \frac{1 + \sqrt{22}}{3}$

d. Đáp số: $x = \frac{1 - \sqrt{41}}{2}$; $x = \frac{1 + \sqrt{41}}{2}$

Bài 13

$x^2 + 4x + 2\,|x - 1| + m = 0 \qquad (1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 + 6x + m - 2 = 0 \quad (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1 \\ g(x) = x^2 + 2x + m + 2 = 0 \quad (3) \end{cases} \end{array}\right.$$

a. Với $m = -5$

Đáp số: $x = 3$; $x = 1$

b. Nhận xét rằng (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có ít nhất 1 nghiệm } x \geq 1 \\ \text{(3) có ít nhất 1 nghiệm } x < 1 \end{array}\right.$

Phương trình (2) có nghiệm x_1, x_2, phương trình (3) có nghiệm x_3, x_4 thoả mãn:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 < 1 \le x_2 \\ 1 \le x_1 \le x_2 \\ x_3 < 1 < x_4 \\ x_3 \le x_2 < 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(1) = m + 5 \le 0 \\ \begin{cases} \Delta'_1 = 11 - m \ge 0 \\ f(1) = m + 5 \ge 0 \text{ vô nghiệm} \\ \dfrac{S}{2} = -6 > 1 \end{cases} \\ g(1) = 5 + m \le 0 \\ \begin{cases} \Delta'_2 = -1 - m \ge 0 \\ g(1) = 5 + m > 0 \\ \dfrac{S}{2} = -1 < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \le -1$$

Bài 14

$(x - 1)^2 = 2|x - m| \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge m \\ (x-1)^2 = 2(x-m) \end{cases} \\ \begin{cases} x < m \\ (x-1)^2 = 2(-x+m) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge m \\ f(x) = x^2 - 3x + 1 + m = 0 \quad (3) \end{cases} \\ \begin{cases} x < m \\ g(x) = x^2 - x + 1 - m = 0 \quad (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{(2) có 2 nghiệm } m \le x_1 < x_2 \\ \text{(3) có 2 nghiệm } x_3 < x_4 < m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta_1 > 0 \\ f(m) > 0 \\ \dfrac{S}{2} = m > m \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta_2 > 0 \\ g(m) > 0 \\ \dfrac{S}{2} < m \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < m < 1 \text{ hoặc } 1 < m < \frac{3}{2}$$

Bài 15

a. $|2x^2 - (m - 2)x - 3| = 2x - 1 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2 - (m-2)x - 3 = 2x - 1 \\ 2x^2 - (m-2)x - 3 = -2x + 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{ll} 2x^2 - mx - 2 = 0 & (2) \\ 2x^2 - (m-4)x - 4 = 0 & (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

Xét (2) ta có: $\Delta_1 = m^2 + 16 > 0 \quad \forall m$

$$af\left(\frac{1}{2}\right) = -(m + 3)$$

$$\frac{S}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m-2}{4}$$

m	Δ	$af(\frac{1}{2})$	$\frac{S}{2} - \frac{1}{2}$	Nghiệm (2) so sánh với $\frac{1}{2}$	Kết luận
$-\infty$					
	+	+	−	$x_1 < x_2 < \frac{1}{2}$	Vô nghiệm
−3		0		$x_1 = -2 < \frac{1}{2} = x_2$	$x = \frac{1}{2}$
	+	−	−	$x_1 < \frac{1}{2} < x_2$	$x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 16}}{4}$
2			0	$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} = x_2$	$x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
	+	−	+	$x_1 < \frac{1}{2} < x_2$	$x = x_2$
$+\infty$					

Xét (3) ta có: $\Delta_2 = (m - 4)^2 + 32 > 0 \ \forall m$

$$af\left(\frac{1}{2}\right) = -(m + 3)$$

$$\frac{S}{2} - \frac{1}{2} = \frac{m-6}{4}$$

m	Δ	$af(\frac{1}{2})$	$\frac{S}{2}-\frac{1}{2}$	So sánh nghiệm x_3, x_4 với $\frac{1}{2}$	Kết luận
$-\infty$					
	+	+	−	$x_3 < x_4 < \frac{1}{2}$	Vô nghiệm
−3		0		$x_3 = -4;\ x_4 = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$
	+	−	−	$x_3 < \frac{1}{2} < x_4$	$x_4 = \frac{m-4+\sqrt{(m-4)^2+32}}{4}$
6			0	$x_3 = -1 < \frac{1}{2} < 2 = x_4$	$x_4 = 2$
	+	−	+	$x_3 < \frac{1}{2} < x_4$	$x_4 = \frac{m-4+\sqrt{(m-4)^2+32}}{4}$
$+\infty$					

Kết luận: Nếu $m < -3$, phương trình (1) vô nghiệm

Nếu $m = -3$, phương trình (1) có nghiệm $x = \frac{1}{2}$

Nếu $m > -3$, phương trình (1) có nghiệm $x = x_2;\ x = x_4$

b. $|x^2 - 2mx + 1 - m| = |x^2 + mx + 1 + 2m| \quad (1)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2mx + 1 - m = x^2 + mx + 1 + 2m \\ x^2 - 2mx + 1 - m = -x^2 - mx - 1 - 2m \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} mx = -m & (2) \\ 2x^2 - mx + m + 2 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

– Nếu $m = 0$, phương trình (2) nghiệm đúng $\forall x$. Suy ra (1) có nghiệm là $\forall x \in R$

– Nếu $m \neq 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ f(-1) = 2x^2 - mx + m + 2 = 0 \end{array}\right.$

Xét phương trình (3) ta có: $\Delta = m^2 - 8m - 8 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad m \leq 4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{6}$

$f(-1) = 2m + 4$

– Nếu $m = -2$ thì (1) $\Leftrightarrow x = -1;\ x = 0$

– Nếu $m \neq -2$ và $m \leq 4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m \geq 4 + 2\sqrt{6}$

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x_{2,3} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8}}{4} \end{array}\right.$$

- Nếu $4 - 2\sqrt{6} < m < 4 + 2\sqrt{6}$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow x = -1$

Vậy: $m = 0$, phương trình đã cho có nghiệm $x \in R$

$m = -2$, phương trình đã cho có nghiệm $x = -1$; $x = 0$

$m \le 4 - 2\sqrt{6}$ hoặc $m > 4 + 2\sqrt{6}$ và $m \ne -2$, phương trình đã cho có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x_{2,3} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2 - 8m - 8}}{4} \end{array}\right.$

Với $4 - 2\sqrt{6} < m < 4 + 2\sqrt{6}$ và $m \ne 0$ thì phương trình có nghiệm $x = -1$

Bài 16

$$|x^2 - 2x + m| = x^2 + 3x - 1 \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + 3x - 1 \ge 0 \\ x^2 + 2x + m = \pm(x^2 + 3x - 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = m + 1 \\ g(x) = 2x^2 + 5x + m - 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$$

Ta có: (2) $\Rightarrow x^2 = \dfrac{-5x - m + 1}{2}$

Suy ra: $f(x) = \dfrac{-5x - m + 1}{2} + 3x - 1 = \dfrac{x - m - 1}{2}$

Do đó: $f(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge m + 1$

Như vậy, ta có điều kiện $\begin{cases} f(m + 1) \ge 0 \\ \text{(2) có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn } m + 1 \end{cases}$

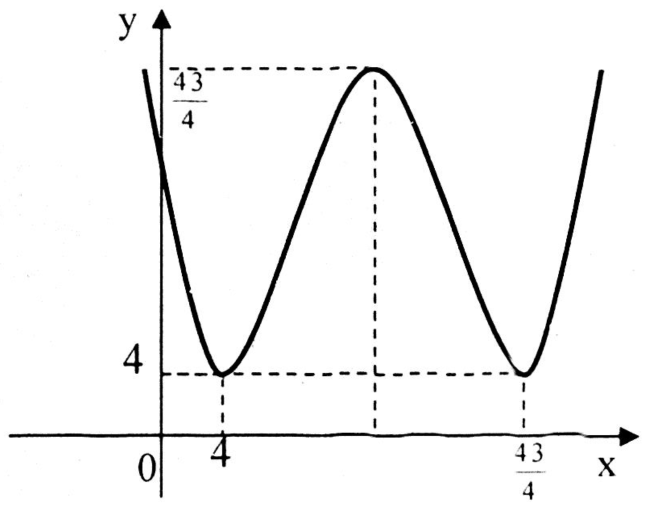
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 5m + 3 \ge 0 \\ \Delta = 33 - 8m > 0 \\ ag(m + 1) = 4(m^2 + 5m + 3) \\ \dfrac{S}{2} - (m + 1) = \dfrac{-4m - 9}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad m < \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$$

Bài 17

Xé: $f(x) = |2x^2 - 10x + 8| - x_1^2 + 5x$

$$= \begin{cases} x^2 - 5x + 8 & \text{với} \quad x \le 1 \quad \text{hoặc} \quad x \ge 4 \\ -3x^2 + 15x - 8 & \text{với} \quad -1 < x < 4 \end{cases}$$

Nhìn vào đồ thị ta thấy giá trị của m cần tìm để phương trình có 4 nghiệm là $4 < m < \frac{43}{4}$



Bài 18

Đáp số: a. $x = -\frac{1}{2}$

b. $x = 4; x = 7$

c. $x = 1$ d. $x = -3$

e. $x = -1 \pm\sqrt{29}$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{2x^2 + 4x + 8}$, $t \ge 0$. Suy ra $t^2 = 2x^2 + 4x + 8$

Khi đó phương trình trở thành $t^2 - 2t - 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 8 \\ t = -6 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 8 = 64 \Leftrightarrow x = -1 \pm\sqrt{29}$

f. $x \ge 2$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sqrt{x-1}$; $t \ge 0$. Suy ra $x = t^2 + 1$

Khi đó phương trình trở thành $\sqrt{t^2 + 2t + 1} - \sqrt{t^2 - 2t + 1} = 2$

$\Leftrightarrow t + 1 - |t - 1| = 2$ (*)

− Nếu $t \ge 1$ thì (*) $\Leftrightarrow 0t = 0$. Vậy (2) nghiệm đúng $\forall t \ge 1$. Suy ra phương trình đã cho nghiệm đúng với $x \ge 2$

− Nếu $0 \le t < 1$ thì (*) $\Leftrightarrow t + 1 - 1 + t = 2 \Leftrightarrow t = 1$ (loại).

Vậy bất phương trình có nghiệm $x \ge 2$

g. $x = 2$

Điều kiện $x \ge 1$ ta có phương trình đã cho viết lại:

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = \left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}\right)^2 - 6$$

Đặt $t = \sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1}$, $t \ge 0$.

Khi đó $t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 3 \end{array}\right.$

Suy ra: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 5x + 2} = 6 - 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ x^2 - 19x + 34 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x \le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 17 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

h. $x = -5;\ x = -6;\ x = -\dfrac{11}{2}$

Hướng dẫn:

$$\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6} = \sqrt[3]{2x+11}$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 5 + 3\sqrt[3]{(x+5)^2(x+6)} + 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)^2} + x + 6 = 2x + 11$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)}\left(\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{x+6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\sqrt[3]{(x+5)(x+6)(2x+11)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -5;\ x = -6;\ x = -\frac{11}{2}$$

i. $x = 3$

Hướng dẫn:

Ta có: $2(x - 2 + 4 - x) \ge \left(\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x}\right)^2$

Suy ra: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le 2$

Mặt khác: $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2 \ge 2\ \forall x$

Vậy, phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2 \\ x^2 - 6x + 11 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

k. $x = 1;\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Đặt $y = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x$

Do đó phương trình trở thành $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y & (1) \\ y^3 + 1 = 2x & (2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x - y = 0 \text{ (vì } x^2 + xy + y^2 + 2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0\ \forall x, y)$$

$\Leftrightarrow$ $x = y$, thay vào (1) ta được $x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Bài 19

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = m \quad (1)$$

Tập xác định: $-1 \le x \le 4$

Đặt $t = \sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{(x+1)(4-x)} = \dfrac{t^2 - 5}{2}$

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + 2t - 5 - 2m = 0$

a. Khi m = 5 (tự giải)

b. Nhận xét: Nếu x_o là nghiệm của phương trình (1) thì $3 - x_o$ cũng là nghiệm của phương trình (1). Vậy:

– Điều kiện cần: Phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_o = 3 - x_o$

$$\Leftrightarrow \quad x_o = \frac{3}{2}$$

Thay vào ta có: $m = \dfrac{5}{2} + \sqrt{10}$

– Điều kiện đủ: Với $m = \dfrac{5}{2} + \sqrt{10}$, hàm số trở thành

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} = \frac{5}{2} + \sqrt{10}$$

Ta có: $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} \le \sqrt{1+1}\sqrt{1+4} = \sqrt{10}$ (Bunhiacopxki)

$$\sqrt{(x+1)(4-x)} \le \frac{x+1+4-x}{2} = \frac{5}{2}$$

Vậy $\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x} + \sqrt{(x+1)(4-x)} \le \dfrac{5}{2} + \sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra dấu "=" $\Leftrightarrow 1 + x = 4 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Vậy, giá trị cần tìm của m là $m = \dfrac{5}{2} + \sqrt{10}$

Nhận xét:

– Đối với phương trình trên ta có thể sử dụng cách đặt sau:

$$\begin{cases} u = \sqrt{x+1}; \quad u \ge 0 \\ v = \sqrt{4-x}; \quad v \ge 0 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} u^2 + v^2 = 5 \\ u + v + uv = 5 \end{cases}$ và giải tìm u, v rồi suy ra nghiệm x

– Xét phương trình $f(x) = \sqrt{x+a} + \sqrt{b-x} + p\sqrt{(x+a)(b-x)} = m$

Để ý $f(x) = f(b - a - x)$ $\forall a, b$. Suy ra phương trình f(x) = m có nghiệm duy nhất khi

$x = b - a - x \Leftrightarrow x = \dfrac{b-a}{2}$ và thay vào phương trình tìm nghiệm

Bài 20

$$(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=m \qquad (1)$$

Đặt $t=(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$ thì $t^2=(x-3)(x+1)$

Khi đó: $(1) \Leftrightarrow t^2+4t-m=0 \qquad (2)$

a. Với $m=-3$, $(2) \Leftrightarrow t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-3 \end{array}\right.$

Với $t=-1 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{5}$

Với $t=-3 \Leftrightarrow (x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x^2-2x-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x=1\pm\sqrt{13} \end{cases}$

$\Leftrightarrow x=1-\sqrt{13}$

b. Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -4$

Khi đó, giả sử t_o là nghiệm phương trình thì $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=t_o$

– Nếu $t_o=0$ thì $x_o=-1$

– Nếu $t_o>0$ thì $\begin{cases} x>3 \\ (x-3)(x+1)=t_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1+\sqrt{4+t_0^2}$

– Nếu $t_o<0$ thì $\begin{cases} x<3 \\ (x-3)(x+1)=t_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{4+t_0^2}$

Tóm lại, với $m \geq 4$ thì phương trình (1) có nghiệm.

Bài 21

$$\sqrt{2x^2+mx-3}=x-m \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x^2+3mx-3-m^2=0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $x \geq m$

Ta có $f(x)=x^2+3mx-3-m^2=0$ luôn có 2 nghiệm trái dấu nên phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow x_1<x_2<m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m)>0 \\ \frac{S}{2}<m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2-3>0 \\ -\frac{3m}{2}<m \end{cases} \Leftrightarrow m>1$$

Do đó, phương trình có nghiệm khi $m \leq 1$.

Bài 22

a $\sqrt{2x^2-2mx+2m+3}=x-1 \ (1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ 2x^2 - 2mx + 2m + 3 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ f(x) = x^2 - 2(m-1)x + 2(m+1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Ta có: $\Delta' = m^2 - 4m - 1$; $af(1) = 5 > 0$; $\frac{S}{2} - 1 = m - 2$

m	Δ'	P	$\frac{S}{2} - 1$	Vị trí nghiệm	Kết luận
$-\infty$					Vô nghiệm
	+	+	−	$x_1 < x_2 < 1$	
$2 - \sqrt{5}$	0			$x_1 = x_1$ $= 1 - \sqrt{5} < 1$	
	−	+	−		
2			0	Vô nghiệm	
	−	+	+		
$2 + \sqrt{5}$	0			$x_1 = x_2$ $= 1 + \sqrt{5} > 1$	$x = 1 + \sqrt{5}$
	+	+	+	$1 < x_1 < x_2$	$x = m - 1 \pm \sqrt{m^2 - 4m - 1}$
$+\infty$					

b. $\sqrt{x - m} + \sqrt{x + m} = m$ (1)

Điều kiện $\begin{cases} x \geq -m \\ x \geq m \end{cases} \Leftrightarrow x \geq |m|$

- Nếu $m < 0$, phương trình (1) vô nghiệm
- Nếu $m = 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow x = 0$
- Nếu $m > 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 - m^2} = m^2 - 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2x \geq 0 \\ 4x^2 - 4m^2 = m^4 - 4m^2 + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{m^2}{2} \\ x = \frac{m^2 + 4}{4} \end{cases}$$

Ta có: $\frac{m^2 + 4}{4} \geq |m| \Leftrightarrow m^2 - 4|m| + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (|m| - 2)^2 \geq 0$

$$\frac{m^2 + 4}{4} \leq \frac{m^2}{2} \Leftrightarrow m \geq 2$$

Vậy: Với $0 \neq m < 2$, phương trình vô nghiệm
Với $m = 0$, phương trình có nghiệm $x = 0$
Với $m \geq 2$, phương trình có nghiệm $x = \frac{m^2 + 4}{4}$.

Chương V

THỐNG KÊ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp.

Nếu như các số liệu thu thập được có nhiều giá trị khác nhau, khoảng cách giữa các giá trị không bằng nhau và độ khác nhau rất ít thì sử dụng cách sắp xếp bảng phân phối thực nghiệm rời rạc nhìn chung hơi cồng kềnh và khó sử dụng. Do đó người ta thường ghép các số liệu giống nhau vào một lớp (nghĩa là phân lớp theo số liệu thống kê) dưới dạng khoảng thì việc xử lý sẽ đơn giản hơn.

Quy trình thực hiện như sau:

– Phân lớp (x_i, x_{i+1})

– Xác định giá trị trung tâm , tần số, tần suất của lớp

+ $x_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$ *: Giá trị trung tâm của lớp thứ i*

+ *Số* n_i*: Các số liệu thống kê thuộc lớp i là tần số của lớp đó*

+ *Số* $f_i = \dfrac{n_i}{n}$ *là tần suất của lớp thứ i (n là số các số liệu thống kê)*

– Thành lập bảng

– Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê

2. Biểu đồ tần suất. Biểu đồ hình quạt.

Để có được những hình ảnh trực quan về tình hình phân bố của các số liệu thống kê, người ta mô tả các bảng phân phối thực nghiệm tần suất (hoặc tần số) bằng các loại biểu đồ, đồ thị như: Biểu đồ tần suất hình cột; Đường gấp khúc tần suất; Biểu đồ hình quạt.

3. Các số đặc trưng.

a. Số trung bình:

$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i$ *(đối với bảng phân phối thực nghiệm rời rạc)*

$\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^o = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i^o$ *(đối với bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp)*

Chú ý: $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$*: Là các số liệu thống kê* *b. Mốt – Trung vị:*

– Mốt M_o: Là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân phối thực nghiệm tần số

– Trung vị M_e của một dãy không giảm (hoặc không tăng) gồm n số liệu thống kê là:

- *Số đứng của dãy (số hạng thứ $\frac{n+1}{2}$) nếu lẻ*
- *Trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy (số hạng thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$) nếu chẵn*

c. Phương sai:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i - \bar{x})^2$$

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(x_i^o - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i^o - \bar{x})^2$$

$S^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ *trong đó* $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i {x_i^o}^2$$

d. Độ lệch chuẩn $S = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}$

B. CÁC DẠNG TOÁN

1. Dạng 1: *Lập bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp vẽ các loại biểu đồ.*

Phương pháp:

* Quy trình lập bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp:

– Phân lớp $(x_i - x_{i+1})$

– Xác định các giá trị $x_i^o = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$; n_i và f_i

– Dựa vào kết quả trên để thành lập bảng

– Nhận xét xu hướng tập trung của các số liệu thống kê

Chú ý: *Do yêu cầu của chương trình nên ở đây không giới thiệu cách phân lớp vì nói chung việc làm đó phức tạp mà chúng ta sẽ phân lớp theo yêu cầu của các bài toán*

** Để vẽ các loại biểu đồ ta xác định các yếu tố theo bảng số liệu đã tính để vẽ.*

Bài 1: *Xét năng suất của công nhân 1 xưởng cơ khí trong 1 năm tính ra phần trăm. Kết quả điều tra 100 công nhân thu được kết quả như sau:*

111 ; 85 ; 86 ; 91 ; 101 ; 109 ; 86 ; 102 ;
111 ; 98 ; 105 ; 85 ; 112 ; 89 ; 112 ; 113 ;
109 ; 115 ; 105 ; 111 ; 99 ; 107 ; 125 ; 89 ;
104 ; 113 ; 96 ; 103 ; 145 ; 104 ; 105 ; 88 ;
103 ; 97 ; 115 ; 109 ; 89 ; 108 ; 107 ; 97 ;
106 ; 107 ; 96 ; 109 ; 116 ; 109 ; 108 ; 109 ;
139 ; 116 ; 117 ; 103 ; 127 ; 119 ; 125 ; 105 ;
116 ; 117 ; 106 ; 101 ; 113 ; 107 ; 105 ; 119 ;
107 ; 119 ; 111 ; 112 ; 129 ; 113 ; 104 ; 106 ;
98 ; 123 ; 99 ; 108 ; 108 ; 199 ; 93 ; 105 ;
106 ; 139 ; 109 ; 93 ; 107 ; 117 ; 107 ; 118 ;
108 ; 111 ; 109 ; 128 ; 128 ; 127 ; 121 ; 118 ;
116 ; 124 ; 114 ; 141

a. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số, tần suất ghép lớp với các lớp như sau:

[80 - 90) ; [90 – 100) ; [100 - 110) ; [110 – 120)
[120 - 130) ; [130 – 140) ; [140 - 150)

b. Dựa vào kết quả đó, hãy nêu xu hướng tập trung của các số liệu thống kê đã cho.

Giải:

a. Ta có: $x_1^o = \dfrac{80+90}{2} = 85$; $x_2^o = \dfrac{90+100}{2} = 95$

$x_3^o = \dfrac{100+110}{2} = 105$; $x_4^o = \dfrac{110+120}{2} = 115$

$x_5^o = \dfrac{120+130}{2} = 125$; $x_6^o = \dfrac{130+140}{2} = 135$

$x_1^o = \dfrac{140+150}{2} = 145$

$n_1 = 8$; $n_2 = 11$; $n_3 = 40$; $n_4 = 27$;

$n_5 = 10$; $n_6 = 2$; $n_7 = 2$

$f_1 = \dfrac{8}{100} = 8\%$; $f_2 = \dfrac{11}{100} = 11\%$; $f_3 = \dfrac{40}{100} = 40\%$;

$f_4 = \dfrac{27}{100} = 27\%$; $f_5 = \dfrac{10}{100} = 10\%$; $f_6 = \dfrac{2}{100} = 2\%$

$f_7 = \dfrac{2}{100} = 2\%$

Dựa vào kết quả thu được ta có bảng:

Các lớp số tăng suất của công nhân X (phần trăm / năm) $x_i - x_{i+1}$	x_i^o	n_i	f_i (%)
80 – 90	85	8	8
90 – 100	95	11	11
100 – 110	105	40	40
110 – 120	115	27	27
120 – 130	125	10	10
130 – 140	135	2	2
140 – 150	145	2	2

b. Theo bảng trên, ta thấy nửa khoảng [100 – 120) chứa thành phần có tần suất cao nhất và chứa 67% (trên 50%) các số liệu thống kê. Do vậy, các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào nửa khoảng [100 – 120)

Bài 2: *Giá bán của 80 lô đất (đơn vị triệu đồng) được ghi lại trong bảng phân bố tần xuất ghép lớp sau:*

Các lớp chỉ số tiền (triệu đồng)	*Tần số*
79,5 – 84,5	*5*
84,5 – 89,5	*10*
89,5 – 94,5	*15*
94,5 – 99,5	*26*
99,5 – 104,5	*13*
104,5 – 109,5	*7*
109,5 – 114,5	*4*

a. Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp
b. Vẽ biểu đồ hình cột tần số, tần suất
c. Vẽ đa giác tần số, tần suất

Giải:

a. Ta có: $n = \sum n_i = 80$

$$f_1 = \frac{5}{80} = 6{,}25\% \quad ; \qquad f_2 = \frac{10}{80} = 12{,}5\% \quad ; \qquad f_3 = \frac{15}{80} = 18{,}45\%$$

$$f_4 = \frac{26}{80} = 32{,}5\% \quad ; \qquad f_5 = \frac{13}{80} = 16{,}25\% \ ; \qquad f_6 = \frac{7}{80} = 8{,}75\%$$

$$f_7 = \frac{4}{80} = 5\%$$

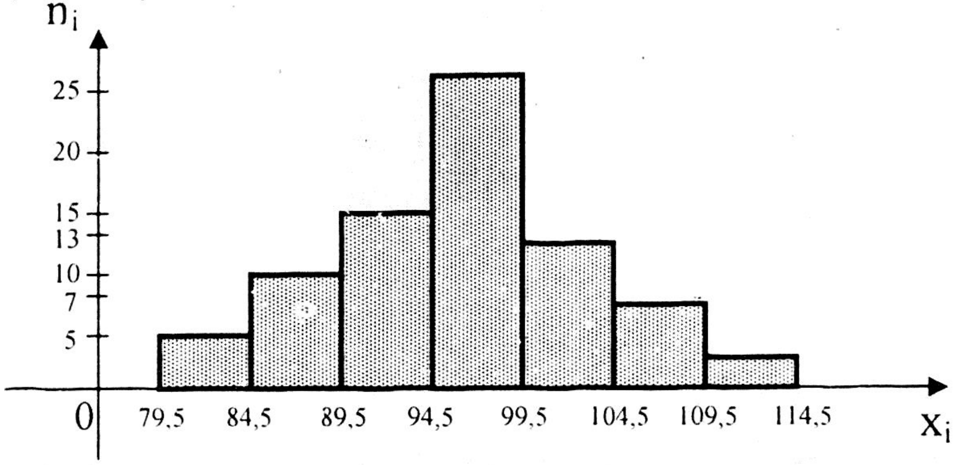
Ta có bảng số liệu

$x_i - x_{i+1}$	x_i^o	f_i
79,5 – 84,5	82	6,25%
84,5 – 89,5	87	12,5%
	92	18,45%

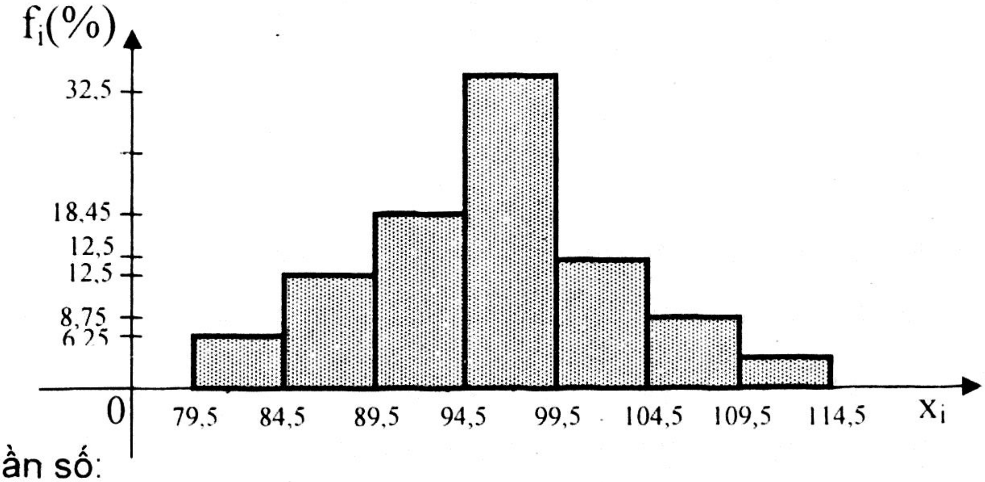
89,5 – 94,5	97	32,5%
94,5 – 99,5	102	16,25%
99,5 – 104,5	107	8,75%
104,5 – 109,5	112	5%
109,5 – 114,5		

b. Vẽ đồ thị hình cột

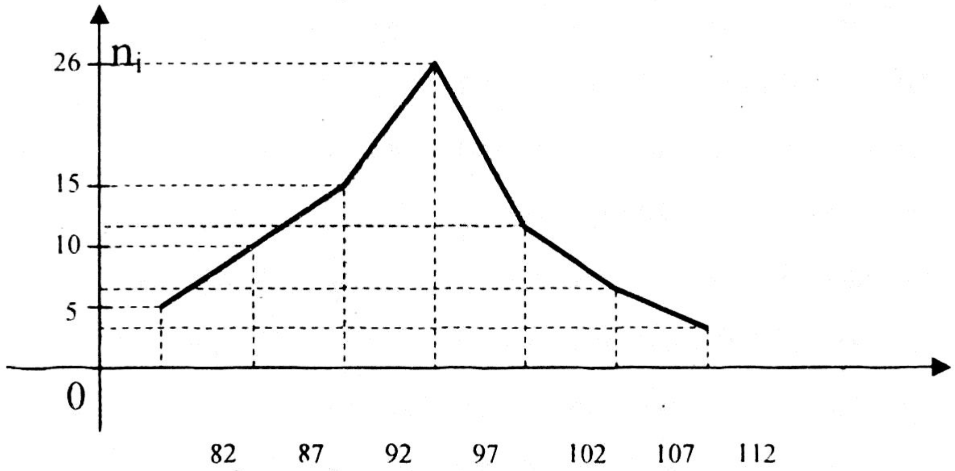
– Tần số:



– Tần suất:



c. Đa giác tần số:



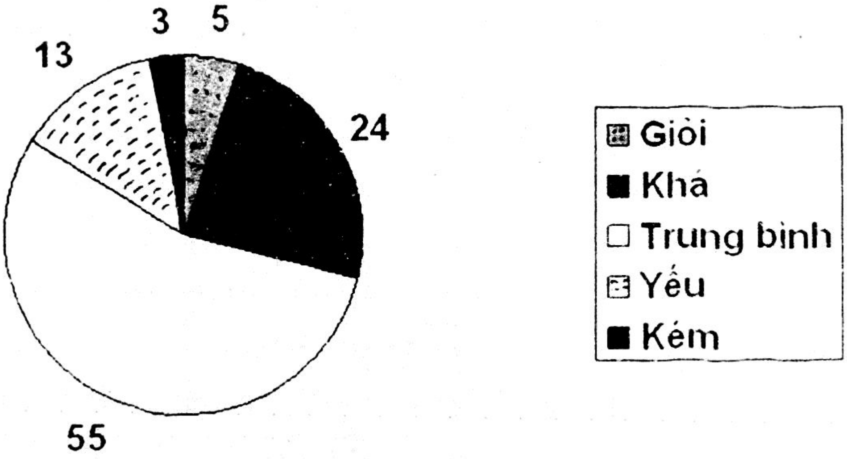
Tương tự ta có đa giác tần suất (thay cột giá trị n_i bởi cột f_i)

Bài 3: *Cho bảng kết quả xếp loại học lực học kỳ I năm học 2005 – 2006 của khối 10 ở một trường THPT như sau:*

Kết quả xếp loại	*Tỉ trọng*
Giỏi	*5*

Khá	*24*
Trung bình	*55*
Yếu	*13*
Kém	*3*

Vẽ biểu đồ hình quạt để mô tả kết quả của bảng số liệu trên:



2. Dạng 2: Tính các số đặc trưng.

Phương pháp:

Dựa vào các số liệu ở bảng. Áp dụng các công thức tính các số đặc trưng $\overline{x}$, *M_0, M_e, S^2, S*

Bài 4: *Kết quả điểm thi học kì môn toán của lớp 10A ở một trường THPT được thống kê như sau:*

Điểm	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	1	3	3	7	15	9	6	4	2

a. Tính điểm trung bình đạt được $\overline{x}$, *phương sai s^2, độ lệch chuẩn s và tính số M_0, M_e.*

b. Xác định đường gấp khúc tần số của bảng số liệu trên.

Giải:

a. Ta có:

$$\overline{x} = \frac{1}{50}(1.2+3.3+3.4+7.5+15.6+9.7+6.8+4.9+2.10)$$

$$= 6,3$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{50}\left(1.2^2+3.3^2+3.4^2+7.5^2+15.6^2+9.7^2+6.8^2+4.9^2+2.10^2\right)$$

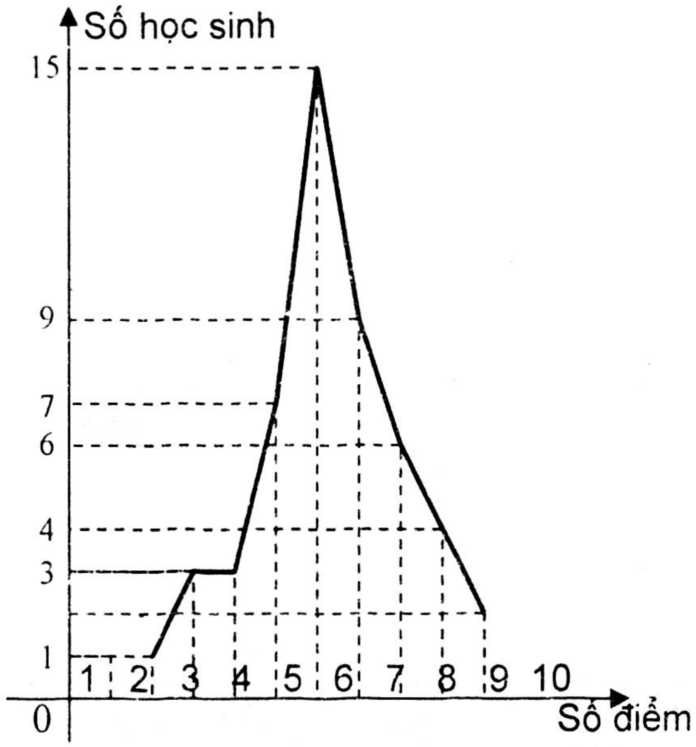
$$= 42,86$$

Suy ra: $s^2 = \left(\overline{x}\right)^2 = 42,86-(6,3)^2 = 3,17$

$M_0 = 6$

$M_e = 6$

b.



Chú ý: để tính các số đặc trưng $\overline{x}$, s^2 ta có thể lập bảng.

x_i	n_i	n_ix_i	$n_ix_i^2$
2	1	2	4
3	3	9	27
4	3	12	48
5	7	35	175
6	15	90	540
7	9	63	441
8	6	48	384
9	4	36	324
10	2	20	200
Tổng		**315**	**2143**

Suy ra: $\overline{x} = \dfrac{315}{50} = 6,3$

$$\overline{x^2} = \frac{2143}{50} = 42,86$$

$$s^2 = 42,86 - (6,3)^2 = 3,17$$

Bài 5: *Cân thử một số quả cam của một số nông trường trong một vụ thu hoạch trái cây năm trước, ta có kết quả thu được như sau:*

Trọng lượng (g)	*Số quả*
90 – 100	*3*
100 – 120	*10*
120 – 140	*25*
140 – 160	*35*
160 – 180	*20*

180 – 200	*6*
200 – 220	*1*

a. Xác định biểu đồ tần suất hình cột, đường gấp khúc tần suất của bảng số liệu đó. Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê ở bảng trên.

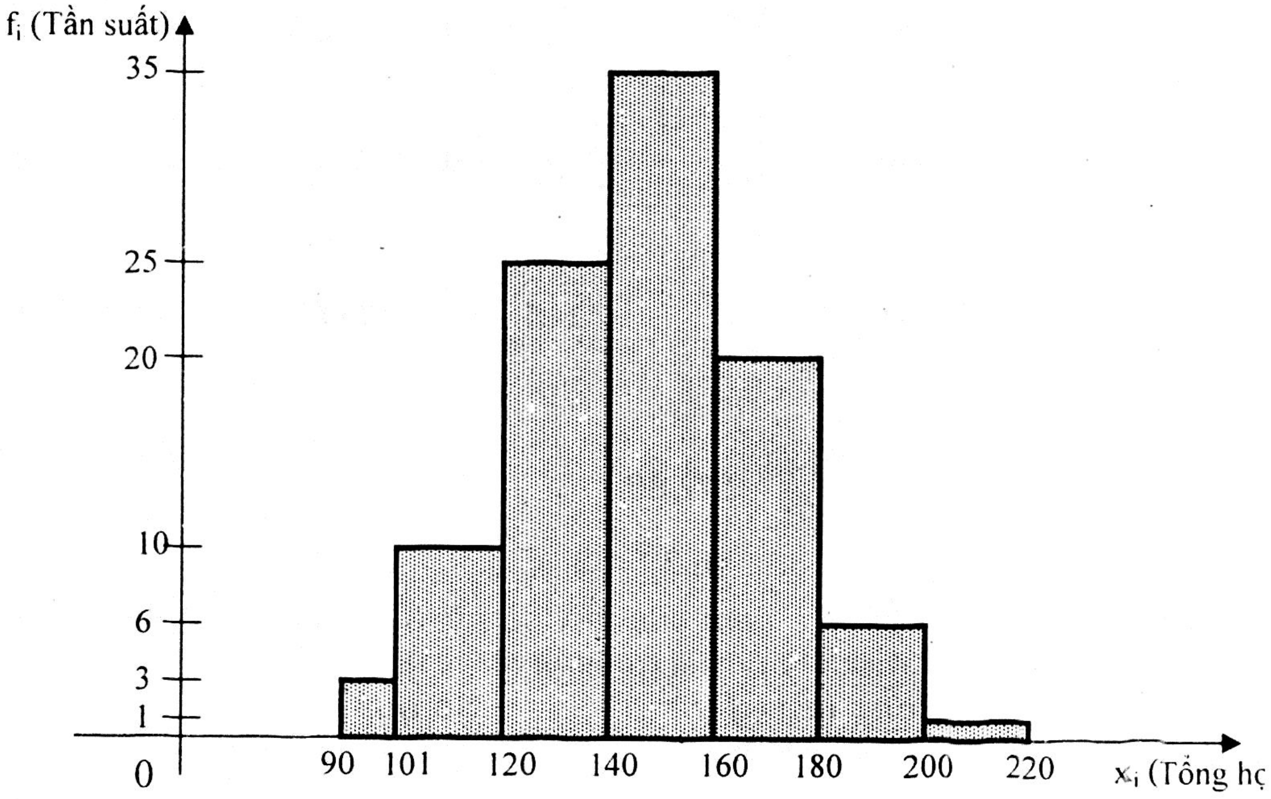
b, Tính số trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê đã cho.

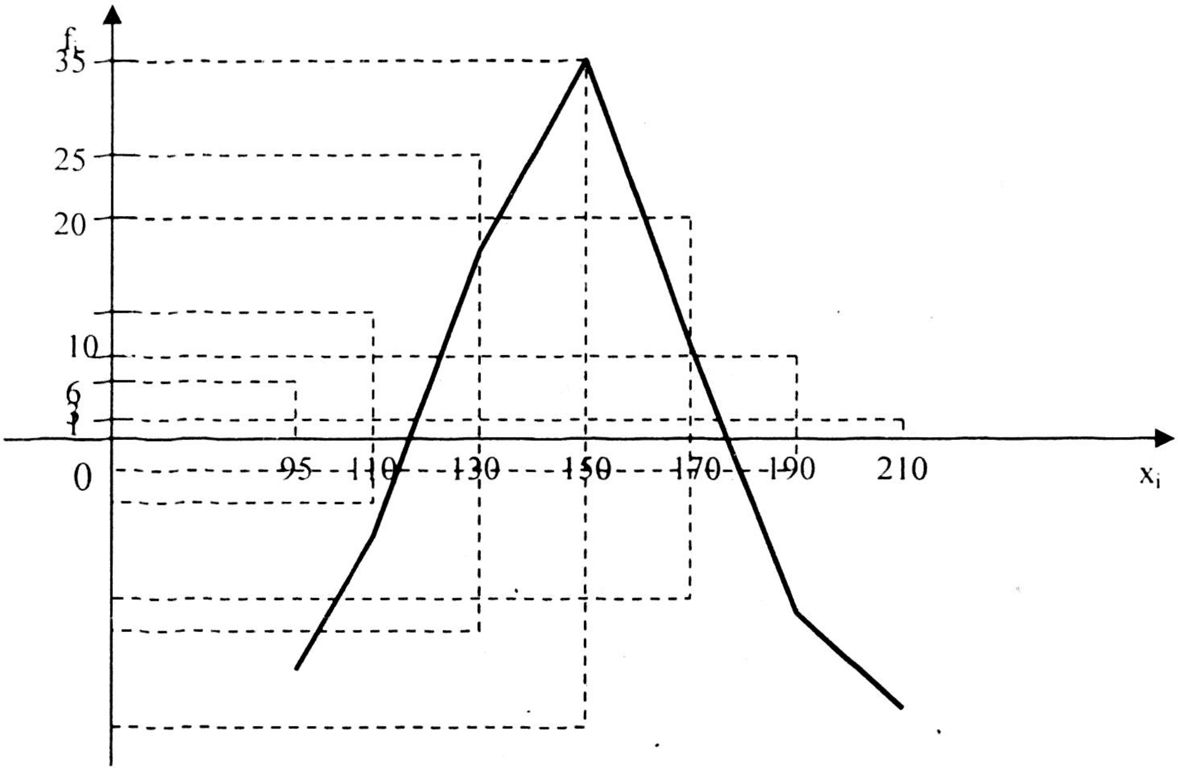
c. Nếu xem các quả cam có trọng lượng không quá 140g là quả loại II thì số quả loại II chiếm bao nhiêu % trong số các quả cam đã cân.

Giải:

Ta có bảng số liệu

x_i – x_{i+1}	**x_i^0**	**n_i**	**f_i(%)**
90 – 100	95	3	3
100 – 120	110	10	10
120 – 140	130	25	25
140 – 160	150	35	35
160 – 180	170	20	20
180 – 200	190	6	6
200 – 220	210	1	1
Tổng		**100**	**100%**





Các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào khoảng [120; 180] với tỷ lệ là 80%.

b. Ta có:

$\overline{x}$ = 95.0,03 + 110.0,1 + 130.0,25 + 150.0,35 + 170.0,2 + 190.0,06 + 210.0,01 = 146,35

$\overline{x^2}$ = 95^2.0,03 + 110^2.0,1 + 130^2.0,25 + 150^2.0,35 + 170^2.0,2 + 190^2.0,06 + 210^2.0,01 = 21.967,75

$$s^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 21.967,75 - (146,35)^2 \approx 23,4$$

Nhận xét:

Để tính các giá trị trên ta có thể tính toán ngay trên bảng số liệu.

$x_i - x_{i+1}$	x_i^0	n_i	n_ix_i	$n_ix_i^2$
90 – 100	95	3	285	27.075
100 – 120	110	10	1100	121.000
120 – 140	130	25	3250	422.500
140 – 160	150	35	5250	787.500
160 – 180	170	20	3400	578.000
180 – 200	190	6	1140	216.600
200 – 220	210	1	210	44.100
Tổng		**n = 100**	**14.635**	**2.196.775**

Khi đó: $\overline{x} = \dfrac{14.635}{100} = 146,35$

$$\overline{x^2} = \frac{2.196.775}{100} = 21467,75$$

$$s^2 = \overline{x^2} - (x)^2 = 549,4275$$

Suy ra: $s = \sqrt{\overline{x^2} - (x)^2} \approx 23,4$

c. Số quả loại II là 3 + 10 + 25 = 38

Vậy tỷ lệ % đạt được của số quả loại 2 là: $\frac{38}{100}.100 = 38\ (\%)$

Bài 6: *Cho số liệu thống kê sau: đo chiều cao của 120 học sinh lớp 12 của một trường THPT (đơn vị cm) ta thu được kết quả:*

Nam				*Nữ*			
175	*163*	*146*	*150*	*172*	*141*	*155*	*150*
176	*162*	*147*	*151*	*172*	*142*	*156*	*154*
176	*161*	*149*	*152*	*172*	*142*	*157*	*152*
177	*165*	*148*	*153*	*175*	*150*	*158*	*152*
176	*169*	*152*	*155*	*175*	*154*	*159*	*153*
170	*144*	*168*	*160*	*170*	*150*	*144*	*160*
170	*143*	*167*	*160*	*170*	*152*	*144*	*165*
170	*142*	*166*	*160*	*170*	*152*	*143*	*159*
165	*141*	*174*	*161*	*170*	*160*	*143*	*165*
166	*144*	*173*	*162*	*170*	*160*	*140*	*159*
175	*156*	*161*	*172*	*175*	*160*	*145*	*168*
175	*157*	*162*	*171*	*176*	*161*	*146*	*159*
176	*160*	*158*	*170*	*176*	*162*	*147*	*168*
176	*164*	*159*	*170*	*175*	*164*	*148*	*159*
175	*163*	*160*	*170*	*176*	*165*	*149*	*168*

a. Lập bảng phân phối thực nghiệm tần số lớp ghép (đồng thời theo chiều cao của nam và nữ)

b. Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất lớp ghép (đồng thời theo chiều cao nam và nữ)

Với các lớp như sau: [135 – 145); [145, 155); [155, 165); [165, 175); [175, 185)

c. Trong cùng một hệ trục toạ độ, hãy vẽ các đường gấp khúc tần suất ghép lớp của bảng số liệu ở câu a, b.

d. Dựa vào các đường ghép khúc tần suất đã vẽ hãy so sánh các phân phối thực nghiệm (theo chiều cao của nam và của nữ)

e. Tính chiều cao trung bình của học sinh nam, của học sinh nữ. Hãy so sánh chiều cao của học sinh nam và chiều cao của học sinh nữ trong nhóm các học sinh được khảo sát.

f. Tính phương sai và độ lệch của chiều cao của học sinh nam, của học sinh nữ.

Giải:

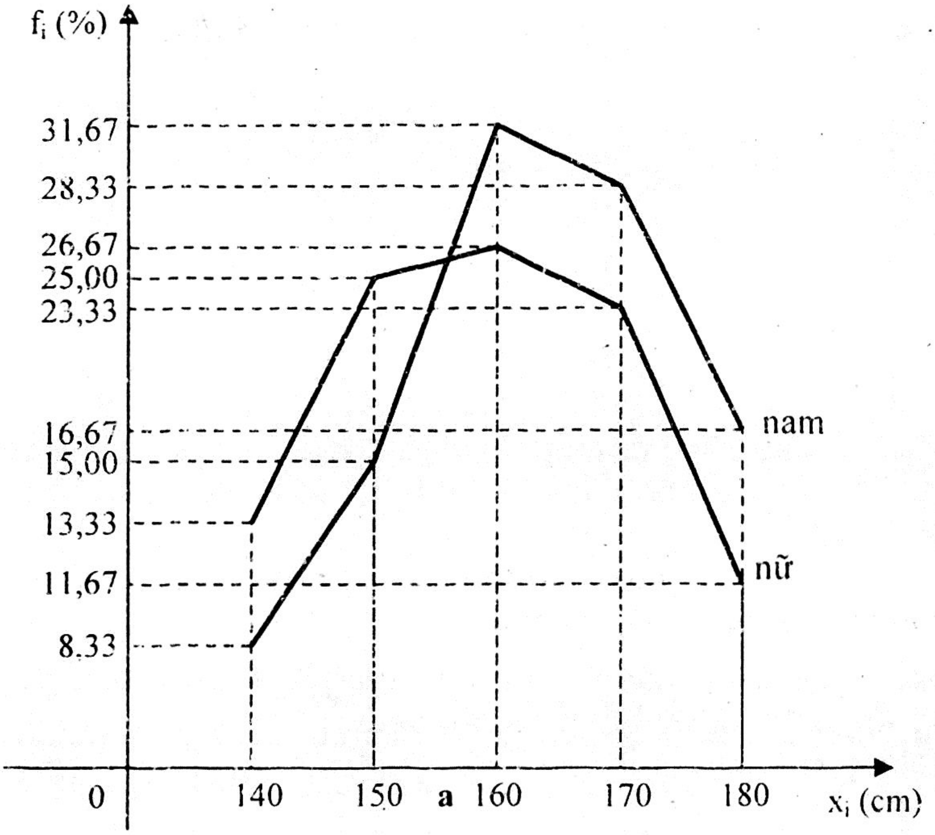
a. Bảng phân phối tần suất ghép lớp.

Chiều cao (cm) $x_i - x_{i+1}$	x_i^0	Tần số n_i	
		Nam	Nữ
135 - 145	140	5	8
145 - 155	150	9	15
155 - 165	160	19	16
165 - 175	170	17	14
175 - 185	180	10	7
Tổng		**60**	**60**

b. Bảng phân phối tần suất ghép lớp

Chiều cao (cm) $x_i - x_{i+1}$	x_i^0	Tần số n_i	
		Nam	Nữ
135 - 145	140	8,33	13,33
145 - 155	150	15,00	25,00
155 - 165	160	31,67	26,67
165 - 175	170	28,33	23,33
175 - 185	180	16,67	11,67
Tổng		**100%**	**100%**

c.



d. Với chiều cao dưới a (cm) thì học sinh nữ chiếm tỷ lệ nhiều hơn.
Với chiều cao trên a (cm) thì học sinh nam chiếm tỷ lệ nhiều hơn.

e. Ta có chiều cao trung bình của học sinh nam là:

$$\overline{x}_{nam} = \frac{1}{60}(5.140 + 9.150 + 19.160 + 17.170 + 10.180) = 163\ (cm)$$

Ta có chiều cao trung bình của học sinh nữ là:

$$\overline{x}_{nữ} = \frac{1}{60}(8.140 + 15.150 + 16.160 + 14.170 + 7.180) = 159,5\ (cm)$$

Vì $\overline{x}_{nam} = 163 > \overline{x}_{nữ} = 159,5$ nên suy ra nhóm nam có chiều cao cao hơn nhóm nữ.

f. Ta có

$$\overline{x^2}_{nam} = \frac{1}{60}\left(5.140^2 + 9.150^2 + 19.160^2 + 17.170^2 + 10.180^2\right) = 26703$$

$$s^2_{nam} = \overline{x}^2_{nam} - \left(\overline{x}_{nam}\right)^2 = 26703 - (163)^2 = 134$$

Suy ra: $s_{nam} \approx 11,59$

Tương tự: $x^2_{nữ} = 148$; $s_{nữ} \approx 12,17$

C. BÀI TẬP LUYỆN

Bài 1. Số tiền điện phải trả của 50 hộ gia đình khu phố A được thống kê theo bảng số liệu sau:

Số tiền (nghìn đồng)	Số hộ
350 – 400	6
400 – 450	15
450 – 500	10
500 – 550	6
550 – 600	9
600 – 650	4

a. Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất của bảng số liệu trên

b. Vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất của bảng số liệu đó.

c. Tính số tiền điện trung bình phải trả của các hộ gia đình trên tính phương sai và độ lệch chuẩn.

Bài 2. Điều tra năng suất lúa của 100 thửa ruộng của một hợp tác xã, người ta thu được bảng số liệu sau:

Năng suất (tạ / ha)	40 – 42	42 – 44	44 – 46	46 – 48	48 – 50	50 – 52
Số thửa	7	13	25	35	15	5

a. Hãy vẽ biểu đồ tần suất hình cột và đường gấp khúc tần suất của bảng số liệu thu được ở trên.

b. Tính năng suất trung bình của các thửa ruộng được điều tra.

c. Nêu nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê và M_0

Bài 3. Đo độ dài của một chi tiết máy (đơn vị độ dài là cm) ta thu được mẫu số liệu sau:

40,1; 40,3; 42,0; 44,5; 49,8; 50,6; 51,2; 53,4; 55,5; 56,0; 56,4; 57,2
57,4; 58,0; 58,7; 58,8; 58,9; 59,1; 59,3; 59,4; 60,0; 60,3; 60,5; 62,8

a Lập bảng phân phối thực nghiệm gồm 6 khoảng với độ dài là [40 – 44); [44 – 48); [48, 52); [52, 56); [56, 60)

b Xác định biểu đồ tần suất, đường gấp khúc tần suất của bảng số liệu trên.

c Tính số trung bình (độ dài trung bình) phương sai, độ lệch chuẩn của các số liệu đó.

Bài 4. Thống kê kết quả điểm thi cuối năm học 2002 – 2003 của hai lớp 10A, 10B của một trường THPT ta thu được:

Điểm số	Số học sinh của lớp 10A đạt được	Số học sinh của lớp 10B đạt được
10	6	4
9	5	3
8	10	5
7	7	8
6	3	2
5	8	10
4	0	4
3	4	0
2	2	3
1	1	1

a. Lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc của bảng số liệu trên (đối với từng lớp)

b. Hãy so sánh kết quả điểm trung bình của hai lớp trên.

c. Tìm phương sai, độ lệch và tìm M_o (đối với từng bảng)

Bài 5. Để đánh giá về tình hình năng suất lúa của 2 xã A và B của một huyện người ta tiến hành điều tra trên 20 thửa ruộng của xã và thu được kết quả như sau (tính theo đơn vị Ta/ha)

Xã A	35	40	42	38	40	40	35	36	38	42
Xã B	33	48	43	33	40	43	46	43	27	40

Xã A	38	39	39	45	40	42	45	44	42	40
Xã B	43	36	48	37	38	46	38	40	40	38

a. Tính năng suất trung bình – phương sai của mỗi xã

b. Có nhận xét gì về kết quả năng suất lúa của từng xã

Bài 6. Cho bảng phân phối thực nghiệm với kết quả sau.

Cân nặng của hai lớp học sinh ở một trường THPT ta thu được.

Số cân nặng (kg)	**Số học sinh**	
	Lớp A	**Lớp B**
30 – 36	1	2
36 – 42	2	7
42 – 48	5	12
48 – 54	15	13
54 – 60	9	7
60 – 66	9	5
Tổng	**41**	**46**

a. Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp (theo từng lớp)

b. Hãy vẽ trên cùng một hệ trục toạ độ hai đường gấp khúc tần suất mô tả hai bảng phân phối thực nghiệm tần suất tương ứng đó của hai lớp từ đó so sánh tình hình phân phối số liệu thống kê của hai lớp.

c. Hãy so sánh mức độ phân tán của các số liệu thống kê (so với số trung bình) ở 2 lớp.

Chương VI
GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Độ và Radian

1. *Cung có độ dài bằng bán kính là cung có số đo 1 rad*

2. *Quan hệ giữa độ và Radian*

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,rad \quad ; \qquad 1\ rad = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Với $\pi \approx 3{,}14$ *thì* $1^\circ \approx 0{,}0175$ *rad và ngược lại* $1\ rad \approx 57^\circ 17'45''$

3. *Độ dài của một cung tròn có số đo* α *rad, bán kính R là* $l = R\alpha$

II. Đường tròn lượng giác

1. *Một đường tròn trên đó ta chọn một chiều chuyển động gọi là đường tròn định hướng.*

Quy ước: Chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, ngược lại là chiều âm.

2. *Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì:*

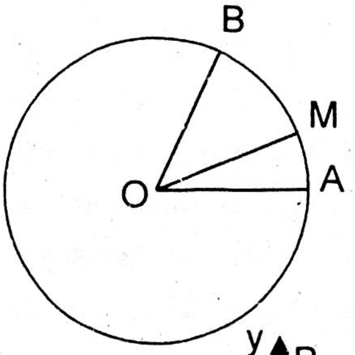
– Cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ *(cung lớn hoặc cung bé) được xác định hoàn toàn.*

– Cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ *được xác định bởi độ dài (đại số) của nó.*

3. *Trên đường tròn định hướng cho cung lượng giác* $\overset{\frown}{AB}$. *Tia OM quay xung quanh gốc O từ OA đến OB tạo ra một góc lượng giác có tia đầu OA, tia cuối OB*

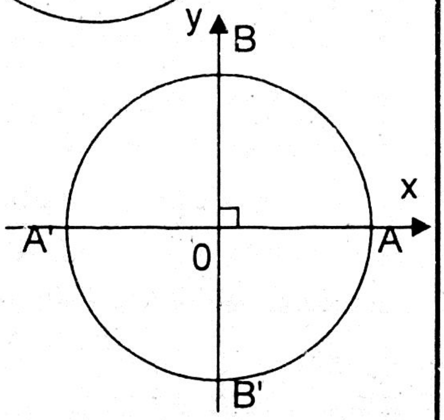
Ký hiệu: (OA, OB)

** Mỗi cung lượng giác ứng với một góc lượng giác và ngược lại.*



4. *Trong mặt phẳng Oxy, một đường tròn định hướng tâm O, bán kính R = 1 cắt các trục toạ độ tại bốn điểm A(1;0), A'(–1;0), B(0;1), B'(0;–1). Điểm A(1;0) làm gốc của các cung lượng giác.*

Đường tròn xác định như trên gọi là đường tròn lượng giác.



III. Số đo của cung và góc lượng giác

1. *Số đo của các cung lượng giác có điểm đầu A, điểm cuối M là:*

$$sđ\overset{\frown}{AM} = \alpha + 2k\pi,\ k \in Z$$

Trong đó α là số đo của một cung lượng giác tuỳ ý có điểm đầu A và điểm cuối M.

Khi viết số đo bằng độ thì ta có: $sđ\overset{\frown}{AM} = a^o + k360^o,\ k \in Z$

2. *Số đo của góc lượng giác (OA,OM) là số đo của cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$*

3. *Hệ thức Salơ*

Trên một đường tròn lượng giác cho 3 điểm tuỳ ý M, N, P ta có:

$$sđ\overset{\frown}{MN} + sđ\overset{\frown}{NP} = sđ\overset{\frown}{MP} + 2k\pi,\ k \in Z$$

4. *Biểu diễn cung lượng giác trên một đường tròn lượng giác ta cho điều đầu A(1;0), cần xác định điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $\overset{\frown}{AM} = \alpha$.*

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Đổi đơn vị độ (a^o) ra đơn vị radian (α radian) và ngược lại***

Phương pháp

$$\begin{matrix} 1^o \longrightarrow \dfrac{\pi}{180} \\ a^o \longrightarrow \alpha \end{matrix} \Rightarrow \frac{a}{180} = \frac{\alpha}{\pi}.$$

Bài 1: *Đổi số đo của các góc sau ra radian*

a. 18^o b. $37^o15'$ c. -25^o d. $-127^o30'$

Giải:

Cách 1: *Sử dụng hệ thức:* $\alpha = \dfrac{a}{180}\pi$

a. Với $a^o = 18^o$ thì $\alpha = \dfrac{a}{180}\pi = \dfrac{\pi}{10} \approx 0,3141$

b. Với $a^o = 37^o15' = 37^o\dfrac{15^o}{60} = 37\dfrac{1^o}{4} = \dfrac{149^o}{4}$

$$\text{Thì } \alpha = \frac{149}{4.180}\pi = \frac{149}{720}\pi \approx 0,0651$$

c. Với $a^o = -25^o$ thì $\alpha = \dfrac{-25}{180}\pi = \dfrac{-5}{36}\pi \approx -0,4363$

d. Với $a^o = -127^o30' = -127\dfrac{30^o}{60} = -127\dfrac{1^o}{2} = -\dfrac{255^o}{2}$

$$\text{Thì } \alpha = \frac{-255}{2.180}\pi = \frac{-17}{24}\pi \approx -2,2253$$

Cách 2: *Sử dụng máy tính bỏ túi đổi từ độ ra radian*

b. $a^o = 37^o15'$ (trên máy tính Casio FX–570 MS. Ấn bốn lần phím $\boxed{\text{MODE}}$ rồi ấn $\boxed{2}$ để màn hình hiện chữ $\boxed{\text{R}}$. Sau đó ấn tiếp $\boxed{3}$ $\boxed{7}$ $\boxed{\bullet,,,}$ $\boxed{1}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\bullet,,,}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Kết quả: $\alpha \approx 0,6501$

Bài 2: *Đổi số đo các cung sau ra độ, phút, giây*

a. $\frac{\pi}{18}$ *b.* $\frac{3\pi}{16}$ *c.* -2 *d.* $\frac{3}{4}$

Giải:

Cách 1: Sử dụng hệ thức $a^o = \frac{\alpha}{\pi}.180^o$

a. $\alpha = \frac{\pi}{18}$ thì $a^o = \frac{\pi}{18\pi}.180^o = 10^o$

b. $\alpha = \frac{3\pi}{16}$ thì $a^o = \frac{3\pi}{16.\pi}.180^o = 33{,}75^o = 33^o45'$

c. $\alpha = -2$ thì $a^o = -\frac{2}{\pi}.180^o = -\frac{360^o}{\pi} = -144{,}591559 = -114^o35'29{,}6''$

d. $\alpha = \frac{3}{4}$ thì $a^o = \frac{3}{4\pi}.180^o = \frac{135^o}{\pi} = 42{,}97183463^o = 42^o58'18{,}6''$

Cách 2: Sử dụng máy tính bỏi túi đổi từ radian ra độ, phút, giây (trên máy tinh Casio FX–570 MS)

d. $\alpha = \frac{3}{4}$

Ấn phím $\boxed{\text{MODE}}$ để màn hình xuất hiện chữ $\boxed{\text{D}}$. Sau đó ấn tiếp $\boxed{(}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{ab/c}}$ $\boxed{4}$ $\boxed{)}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{DRG}\blacktriangleright}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\bullet,,,}$

Kết quả $a^o = 42^o58'18{,}6''$.

Dạng 2. *Tính độ dài của các cung tròn, khi biết bán kính đường tròn, số đo cung (góc lượng giác) và ngược lại*

Phương pháp

- Sử dụng công thức $l = R.\alpha$
- α tính bằng đơn vị radian và l, R phải cùng đơn vị độ dài

Bài 3: *Một đường tròn có bán kính 20cm. Tính độ dài các cung trên đường tròn có số đo*

a. $\frac{\pi}{15}$ *b.* *1,5* *c.* 37^o

Giải:

a. $\alpha = \frac{\pi}{15}$, độ dài cung tròn $l = 20.\frac{\pi}{15} \approx 4{,}19$ cm

b. 1,5, độ dài của cung tròn $l = 20.1{,}5 = 30$ cm

c. 37^o nên $\alpha \approx 0{,}6501$, độ dài của cung tròn $l \approx 13$ cm

Bài 4:

a. Trong một đường tròn, cung có độ dài 2,95cm và có số đo $\frac{\pi}{16}$. *Tính bán kính của đường tròn* *b. Trong một đường tròn có bán kính 15cm, độ dài một cung 10,47cm. Tính số đo của cung đó theo độ, phút, giây*

Giải:

a. Ta có $l = R.\alpha \Rightarrow R = \frac{l}{\alpha} = \frac{2,95.16}{\pi} \approx 15cm$

b. Ta có $l = R.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{10,47}{15} = 0,698$

Suy ra, số đo của cung là $39^\circ59'32,83''$

Dạng 3: ***Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác có số đo tương ứng đã cho***

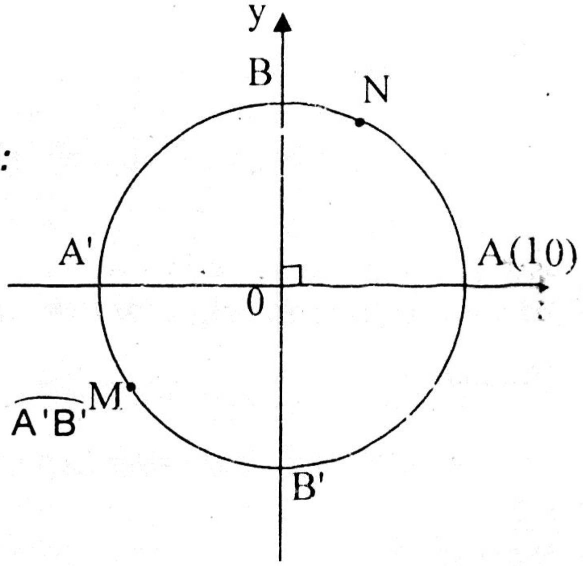
Phương pháp

- Vẽ một đường tròn lượng giác
- Lấy điểm đầu của các cung là A(1;0)
- Xác định điểm cuối M của cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo đã cho

Bài 5: *Trên đường tròn lượng giác hãy biểu diễn các cung có số đo:*

a. $-\frac{3\pi}{4}$ *b.* 420° *c.* $k\frac{\pi}{3}, k \in Z$

d. $-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z$



Giải:

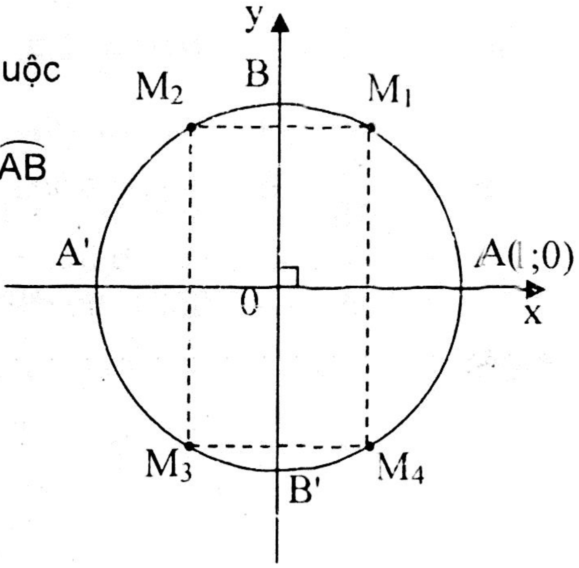
a. sđ $\overset{\frown}{AM} = -\frac{3\pi}{4} = -\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)$

Điểm cuối M của cung $-\frac{3\pi}{4}$ là trung điểm của cung hình học $\overset{\frown}{A'B'}$

b. sđ $\overset{\frown}{AN} = 420^\circ = 60^\circ + 360^\circ$

sđ $\overset{\frown}{AN} = \frac{\pi}{3} + 2\pi$

Điểm cuối N của cung $(\frac{\pi}{3} + 2\pi)$ thuộc cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ sao cho $\overset{\frown}{BN} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$



c. sđ $\overset{\frown}{AM} = k\frac{\pi}{3}, k \in Z$

- Khi k = 0 thì sđ $\overset{\frown}{AM} = 0$
  nên điểm M trùng với điểm A
- Khi k = 1 thì sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{3}$

Nên điểm cuối M trùng điểm $M_1 \in \overset{\frown}{AB}$ sao cho $\overset{\frown}{BM_1} = \frac{1}{3}\overset{\frown}{AB}$

– Khi k = 2 thì sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$

Nên điểm cuối M trùng điểm $M_2 \in \overset{\frown}{A'B}$ sao cho M_2 đối xứng M_1 qua Oy

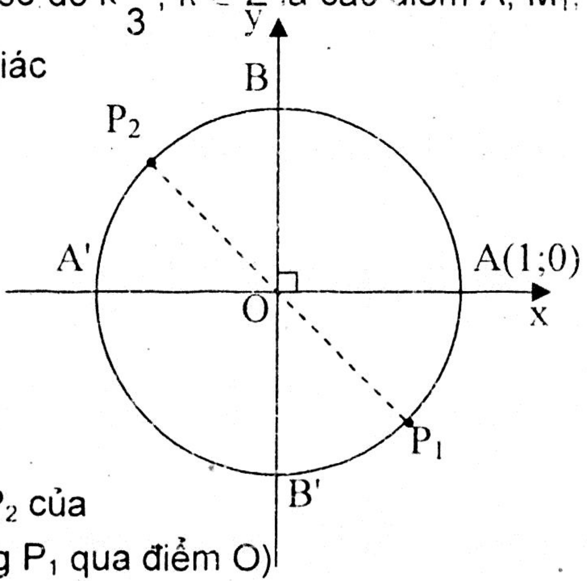
– Khi k = 3 thì sđ $\overset{\frown}{AM} = \pi$, nên điểm cuối M trùng với điểm A'

– Khi k = 4 thì sđ $\overset{\frown}{AM} = 4\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$, nên điểm $M_3 \in \overset{\frown}{A'B'}$ sao cho M_3 đối xứng M_2 qua Ox

– Khi k = 5 thì sđ $\overset{\frown}{AM} = 5\frac{\pi}{3} = 2\frac{\pi}{3} + \pi$, nên điểm $M_4 \in \overset{\frown}{AB'}$ sao cho M_4 đối xứng M_1 qua Ox

– Khi k = 6 thì $M \equiv A$...

Vậy điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo $k\frac{\pi}{3}$, $k \in Z$ là các điểm A, M_1, M_2, A', M_3, M_4 thuộc đường tròn lượng giác



d. sđ $\overset{\frown}{AP} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

– Khi k = 0 thì sđ $\overset{\frown}{AP} = -\frac{\pi}{4}$ nên điểm cuối P là trung điểm P_1 cung hình học $\overset{\frown}{AB'}$

– Khi k = 1 thì sđ $\overset{\frown}{AP} = -\frac{\pi}{4} + \pi$ nên điểm của P là trung điểm P_2 của cung hình học $\overset{\frown}{A'B}$ (P_2 đối xứng P_1 qua điểm O)

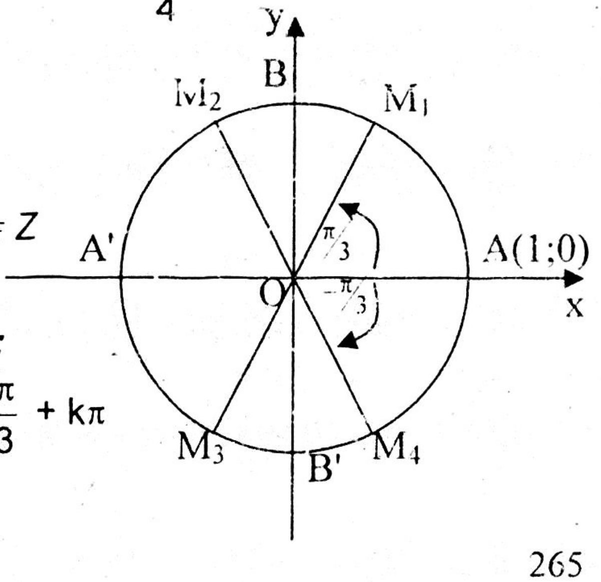
– Khi k = 2 thì sđ $\overset{\frown}{AP} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$ thì điểm cuối của P trùng với P_1...

Vậy, điểm cuối của cung $\overset{\frown}{AP}$ có số đo $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$ là hai điểm P_1, P_2 thuộc đường tròn lượng giác

Bài 6: *Trên một đường tròn lượng giác, hãy biểu diễn các cung lượng giác có số đo sau:* $\alpha = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$ *và* $\alpha_1 = k\pi$, $k \in Z$

Viết công thức tổng quát

Giải:



Ta biểu diễm sđ $\overset{\frown}{AM}$ với sđ $\overset{\frown}{AM} = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$

Điểm cuối M trùng với các điểm M_1, M_2, M_3, M_4

Biểu diễn $\overset{\frown}{AN}$ với sđ$\overset{\frown}{AN} = k\pi$

Điểm cuối N trùng với các điểm A, A'

Trên đường tròn lượng giác ta có 6 điểm cuối phân biệt A, M_1, M_2, A', M_3, M_4

Suy ra: Công thức tổng quát của hai cung lượng giác có số đo α và α_1 là $\alpha_2 = k\dfrac{\pi}{3}$, $k \in Z$

Dạng 4: ***Tính số đo của cung lượng giác khi biết các điểm cuối của cung đó***

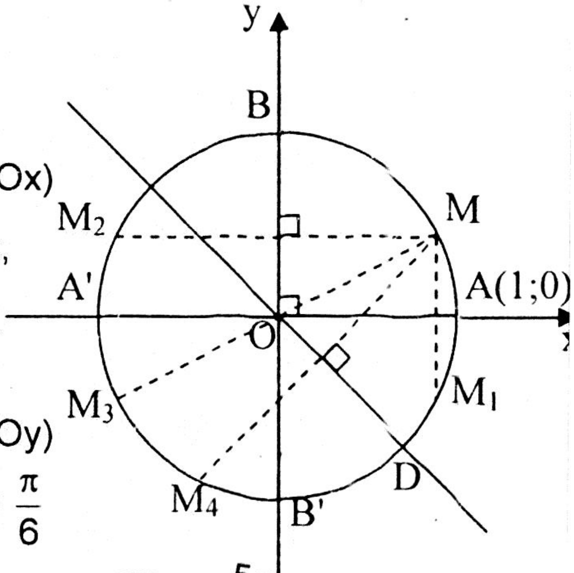
Phương pháp

– Trên đường tròn lượng giác lấy điểm đầu của cung là A(1;0)

– Vận dụng hệ thức Salơ: Với hai điểm M, N thuộc đường tròn ta có sđ$\overset{\frown}{AM}$ + sđ$\overset{\frown}{MN}$ = sđ$\overset{\frown}{AN}$ + $k2\pi$, $k \in Z$

Bài 7: *Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ$\overset{\frown}{AM} = \dfrac{\pi}{6}$. Gọi M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, Oy, gốc toạ độ O và đường phân giác góc phần tư thứ hai. Tìm số đo các cung* $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$, $\overset{\frown}{AM_4}$

Giải:



a. Ta có $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AM_1}$

(do M_1 đối xứng với M qua Ox)

Suy ra: sđ$\overset{\frown}{AM_1} = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

b. Ta có $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{A'M_2}$

(do M_2 đối xứng với M qua Oy)

Suy ra: sđ$\overset{\frown}{A'M_2}$ = sđ$\overset{\frown}{AM} = \dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, vậy sđ$\overset{\frown}{AM_2} = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in z$

c. Ta có $\overset{\frown}{A'M_3} = \overset{\frown}{AM}$ (do M_3 đối xứng với M qua gốc toạ độ O). Suy ra sđ$\overset{\frown}{AM_3}$ = sđ$\overset{\frown}{AA'}$ + sđ$\overset{\frown}{A'M_3} = \pi + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{7\pi}{6}$

Vậy: sđ$\overset{\frown}{AM_3} = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in Z$

d. Gọi một giao đểm của đường phân giác góc phần tư thứ hai với đường tròn lượng giác là D

Ta có: $\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{DM_4} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{MD}$ = sđ$\overset{\frown}{DM_4}$

$\overset{\frown}{MD} = \overset{\frown}{MA} + \overset{\frown}{AD} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{MD}$ = sđ$\overset{\frown}{MA}$ + sđ$\overset{\frown}{AD}$

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{DM_4} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{sđ}\,\overset{\frown}{AM_4} = \text{sđ}\,\overset{\frown}{AD} + \text{sđ}\,\overset{\frown}{DM_4} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$$

Vậy sđ $\overset{\frown}{AM_4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi,\ k \in Z$

C. BÀI TẬP

Bài 1.

1. Đổi số đo các góc sau ra radian
   - a. $71^\circ62'$
   - b. $42^\circ12'$
   - c. -250°
   - d. $-78^\circ35'$
2. Đổi số đo các góc sau ra độ, phút, giây
   - a. $\frac{4}{3}$
   - b. $\frac{5\pi}{7}$
   - c. $-\frac{17\pi}{5}$
   - d. -4

Bài 2.

1. Một đường tròn có bán kính 5cm. Tính độ dài các cung trên đường tròn đó có số đo:
   - a. 1
   - b. 49°
   - c. $\frac{3\pi}{7}$
2. Cho một đường tròn có bán kính 8cm. Tính số đo bằng độ, phút, giây các cung có độ dài
   - a. 6cm
   - b. 0,3dm
3. Tính bán kính của một đường tròn, trên đó một cung có độ dài 10cm và có số đo là
   - a. 1 rad
   - b. $37^\circ15'$

Bài 3. Trên một đường tròn lượng giác. Hãy biểu diễn các cung lượng giác có số đo sau dưới dạng một công thức tổng quát

a. $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$ và $\alpha_1 = -\pi + k2\pi,\ k \in Z$

b. $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi$ và $\alpha_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

Bài 4. Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi sđ $\overset{\frown}{AM} = -35^\circ$. Gọi M_1, M_2, M_3, M_4 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy, gốc toạ độ O và đường phân giác góc phần tư thứ nhất. Tìm số đo các cung $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$, $\overset{\frown}{AM_4}$

Bài 5. Trên đường tròn lượng giác, cung lượng giác $\overset{\frown}{AB}$ có số đo 425°. Tìm cung lượng giác có điểm đầu A, điểm cuối B có số đo âm lớn nhất.

§2. CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Các giá trị lượng giác của cung α

1. Định nghĩa

Trên đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\frown}{AM}$ *có sđ*$\overset{\frown}{AM} = \alpha$

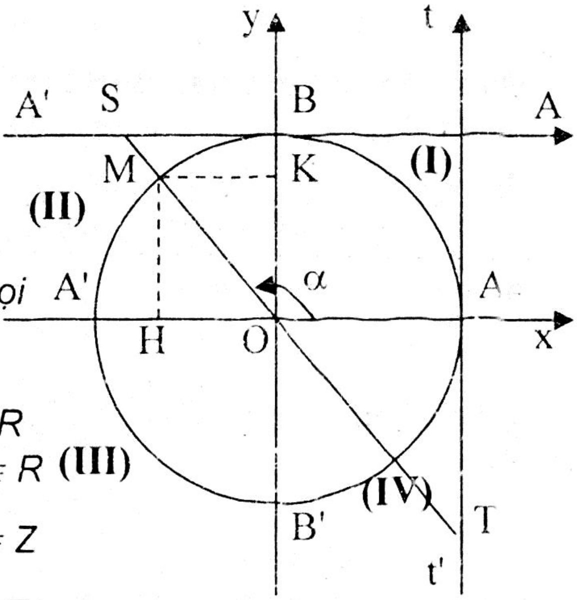
$\sin\alpha = \overline{OK}$

$\cos\alpha = \overline{OH}$

$\text{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

$\text{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z$

Ox gọi là trục cosin, Oy gọi là trục sin, At gọi là trục tang, BA gọi là trục cotang



2. Các hệ quả của định nghĩa

$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha,\ k \in Z,\ \forall\alpha \in R$

$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha,\ k \in Z,\ \forall\alpha \in R$

$\text{tg}(\alpha + k\pi) = \text{tg}\alpha,\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

$\text{cotg}(\alpha + k\pi) = \text{cotg}\alpha,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z$

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ và $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$

3. Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

Phần tư Giá trị lượng giác	I	II	III	IV
cosα	+	–	–	+
sinα	+	+	–	-
tgα	+	–	+	-
cotgα	+	–	+	-

II. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

1. Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1 + \text{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha},\quad \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$

$1 + \text{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z$

$tg\alpha.cotg\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$

2. Giá trị lượng giác của các cung liên quan đặc biệt

a. Cung đối nhau

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$tg(-\alpha) = -tg\alpha$ $\qquad$ $cotg(-\alpha) = -cotg\alpha$

b. Cung bù nhau

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$ $\qquad$ $cotg(\pi - \alpha) = -cotg\alpha$

c. Cung phụ nhau

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = cotg\alpha$ $\qquad$ $cotg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -cotg\alpha$

d. Cung hơn kém nhau π

$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$

$tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$ $\qquad$ $cotg(\alpha + \pi) = cotg\alpha$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Cho biết giá trị của một cung lượng giác, tính các giá trị còn lại***

Phương pháp

- Từ khoảng xác định của góc α, xác định dấu của các giá trị lượng giác là âm hay dương
- Sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản để tính các giá trị lượng giác tương ứng

Bài 1: *Tính các giá trị lượng giác của góc α nếu*

a. $\cos\alpha = \frac{6}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\qquad$ b. $\sin\alpha = 0,7$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c. $tg\alpha = \frac{15}{7}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\qquad$ d. $cotg\alpha = -3$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

Giải:

a. Ta có $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{36}{169} = \frac{133}{169}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{\sqrt{133}}{13},\ tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\sqrt{133}}{6} \text{ và}$$

$$cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{6}{\sqrt{133}}$$

b. Ta có $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (0,7)^2 = 0,51$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{0,51}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{0,7}{\sqrt{0,51}} = -\frac{7}{\sqrt{51}}$; $\quad cotg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{\sqrt{0,51}}{0,7} = -\frac{\sqrt{51}}{7}$

c. Ta có $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha} = \frac{1}{1 + \frac{225}{49}} = \frac{49}{274}$$

Suy ra: $\cos\alpha = -\frac{7}{\sqrt{274}}$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha.tg\alpha = -\frac{7}{\sqrt{274}}.\frac{15}{7} = -\frac{15}{\sqrt{274}}$$

$$tg\alpha.cotg\alpha = 1 \Rightarrow cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{7}{15}$$

d. Ta có $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$

$$1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{cotg^2\alpha} = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = cotg\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha.cotg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}.(-3) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$tg\alpha.cotg\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{cotg\alpha} = -\frac{1}{3}$$

Dạng 2: ***Tính giá trị của một biểu thức lượng giác***

Phương pháp

Thay giá trị của cung lượng giác vào biểu thức hoặc biến đổi biểu thức trước khi thay giá trị đã cho vào.

Bài 2:

a. Cho $tg\alpha = 3$, tính giá trị của biểu thức

$$A = \frac{\sin^2\alpha - 5\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha}$$

b. Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, tính giá trị của biểu thức $B = \frac{1 + g\alpha}{1 - g\alpha}$

Giải:

a. Chia tử vào mẫu cho $\cos^2\alpha$ ta được: $A = \dfrac{tg^2\alpha - 5}{2tg^2\alpha + 3tg\alpha + 1}$

Thay $tg\alpha = 3$ vào ta được $A = \dfrac{9-5}{18+9+1} = \dfrac{4}{28} = \dfrac{1}{7}$

b. Ta có $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha > 0$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4}$, thay vào, ta được: $B = \dfrac{1+\dfrac{3}{4}}{1-\dfrac{3}{4}} = 7$

Dạng 3: *Chứng minh một đẳng thức*

Phương pháp: Để chứng minh một đẳng thức A = B ta có thể dùng:

- Biến đổi A thành B hoặc B thành A
- Biến đổi A = C và B = C, suy ra A = B
- Biến đổi tương đương

Bài 3: *Chứng minh các đẳng thức*

a. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

b. $\left(\dfrac{\sin\alpha + \cot g\alpha}{1+\sin\alpha.tg\alpha}\right)^2 = \dfrac{\sin^2\alpha + \cot g^2\alpha}{1+\sin^2\alpha.tg^2\alpha}$ c. $\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$

Giải:

a. Ta có: $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

b. Ta có: $\left(\dfrac{\sin\alpha + \cot g\alpha}{1+\sin\alpha.tg\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{\sin\alpha + \dfrac{1}{tg\alpha}}{1+\sin\alpha.tg\alpha}\right)^2 = \left(\dfrac{\dfrac{\sin\alpha.tg\alpha + 1}{tg\alpha}}{1+\sin\alpha.tg\alpha}\right)^2$

$= \dfrac{1}{tg^2\alpha}$ (1)

$\dfrac{\sin^2\alpha + \cot g^2\alpha}{1+\sin^2\alpha.tg^2\alpha} = \dfrac{\sin^2\alpha + \dfrac{1}{tg^2\alpha}}{1+\sin^2\alpha.tg^2\alpha} = \dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha.tg^2\alpha + 1}{tg^2\alpha}}{1+\sin^2\alpha.tg^2\alpha}$

$= \dfrac{1}{tg^2\alpha}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\left(\frac{\sin\alpha + \cot g\alpha}{1 + \sin\alpha.tg\alpha}\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha + \cot g^2\alpha}{1 + \sin^2\alpha tg^2\alpha}$

c. $\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$ $\Leftrightarrow (1 + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha) = \cos^2\alpha$

$\Leftrightarrow 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Dạng 4: ***Rút gọn một biểu thức***

Phương pháp

– Sử dụng các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản, giá trị lượng giác các cung liên quan đặc biệt để biến đổi.

– Khi biến đổi cố gắng làm xuất hiện nhân tử chung ở tử và mẫu để giản ước hoặc các hạng tử trái dấu để khử.

Bài 4: *Rút gọn các biểu thức*

a. $A = \cos\alpha.\sin(6\pi - \alpha)(1 + \cot g^2(-\alpha))$

b. $B = \cos(5\pi - \alpha) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + tg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - \cot g(3\pi - \alpha)$

c. $C = \frac{\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \cot g\alpha) + \cos^2\alpha(1 + tg\alpha)}}{\sin\alpha + \cos\alpha}$

d. $D = \frac{\sin(\alpha + \pi).\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}).tg(7\pi + \alpha)}{\cos(5\pi - \alpha).\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).tg(2\pi + \alpha)}$

Giải:

a. Ta có: $\sin(6\pi - \alpha) = \sin(-\alpha + 3.2\pi) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\cot g(-\alpha) = -\cot g\alpha \Rightarrow \cot g^2(-\alpha) = cog^2\alpha$

$A = \cos\alpha.(-\sin\alpha).(1 + \cot g^2\alpha)$

$= -\sin\alpha.\cos\alpha.\frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot g\alpha$

Vậy $A = -\cot g\alpha$

b. $\cos(5\pi - \alpha) = \cos(-\alpha + \pi + 2.2\pi) = \cos(-\alpha + \pi) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2} + 2\pi) = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha = -\cos\alpha$

$tg(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = tg(\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot g\alpha$

$\cot g(3\pi - \alpha) = \cot g(-\alpha + 3\pi) = \cot g(-\alpha) = -\cot g\alpha$

$B = -\cos\alpha + \cos\alpha + \cot g\alpha + \cot g\alpha = 2\cot g\alpha$

c. Ta có: $\sqrt{\sin^2\alpha(1 + \cot g\alpha) + \cos^2\alpha(1 + tg\alpha)}$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha(1+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}) + \cos^2\alpha(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha})}$$

$$= \sqrt{\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}$$

$$= \sqrt{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha + \cos^2\alpha}$$

$$= \sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$$

$$C = \frac{\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{|\sin\alpha+\cos\alpha|}{\sin\alpha+\cos\alpha}$$

$$C = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad \sin\alpha+\cos\alpha>0 \\ -1 & \text{nếu} \quad \cos\alpha+\sin\alpha<0 \end{cases}$$

$$\text{d. } D = \frac{\sin(\alpha+\pi).\cos(\alpha-\frac{\pi}{2}).\text{tg}(7\pi+\alpha)}{\cos(5\pi-\alpha).\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right).\text{tg}(2\pi+\alpha)}$$

$$= \frac{\sin\alpha.\sin\alpha.\text{tg}\alpha}{-\cos\alpha.(-\cos\alpha).\text{tg}\alpha} = \frac{-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = -\text{tg}^2\alpha$$

Dạng 5: *Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc vào số đo của cung lượng giác*

Phương pháp

Kết hợp các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản với các hằng đẳng thức:

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$

để biến đổi biểu thức thành một hằng số

Bài 5: *Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào* α

$A = \cos^4\alpha(3 - 2\cos^2\alpha) + \sin^4\alpha(3 - 2\sin^2\alpha)$

$B = 2(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha)$

Giải:

Cách 1:

$A = 3(\cos^4\alpha + \sin^4\alpha) - 2(\cos^6\alpha + \sin^6\alpha)$

$= 3[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha] - 2[(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^3 -$

$- 3\cos^2\alpha.\sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)]$

$= 3(1 - 2\cos^2\alpha.\sin^2\alpha) - 2(1 - 3\cos^2\alpha.\sin^2\alpha) = 1$

Vậy $A = 1$

$B = 2(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2 - (\sin^8\alpha + \cos^8\alpha)$

Ta có: $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

$(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2 = (1 - \sin^2\alpha.\cos^2\alpha)^2$

$= 1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + \sin^4\alpha.\cos^4\alpha$

Mặt khác: $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$

$= (1 - 2\sin^2\alpha.\cos^2\alpha) - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$

$= 1 - 4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$

$B = 2 - 4\sin^2\alpha.\cos^2\alpha + 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha - 1 + 4\sin^2\alpha.\cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha.\cos^4\alpha$

$B = 1$

Cách 2:

Đặt $a = \cos^2\alpha$ thì $\sin^2\alpha = 1 - a$

$A = a^2(3 - 2a) + (1 - a)^2.[3 - 2(1 - a)]$

$= 3a^2 - 2a^3 + 1 - 2a + a^2 + 2a - 4a^2 + 2a^3 = 1$

$B = 2[(1 - a)^2 + a^2 + a(1 - a)]^2 - [(1 - a)^4 + a^4]$

$= 2(1 - a + a^2)^2 - (1 - a)^4 - a^4$

$= (1 - a + a^2)^2 - (1 - a)^4 + (1 - a + a^2)^2 - a^4$

$= (2 - 3a + 2a^2)a + (1 - a + 2a^2)^2\,(1 - a) = 1$

Dạng 6: *Chứng minh đẳng thức giữa các giá trị lượng giác của các góc trong một tam giác*

Phương pháp

- *Sử dụng phương pháp chứng minh một đẳng thức*
- *Trong một tam giác ta luôn có:*

$$A + B + C = \pi \text{ hay } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Bài 6: *Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:*

a. $\cos(A + B - C) = -\cos 2C$ b.

$$tg\frac{A + B - 2C}{2} = \cot g\frac{3C}{2}$$

Giải:

a. Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C \Leftrightarrow A + B - C = \pi - 2C$

Suy ra: $\cos(A + B - C) = \cos(\pi - 2C) = -\cos 2C$

b. Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} - C = \frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}$

Suy ra: $tg\frac{A + B - 2C}{2} = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3C}{2}\right) = \cot g\frac{3C}{2}$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Tính các giá trị lượng giác của góc α nếu:

a. $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ với $270^\circ < \alpha < 360^\circ$

b. $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c. $\operatorname{tg}\alpha = 3$ với $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

d. $\operatorname{cotg}\alpha = 2 + \sqrt{3}$ với $\alpha = 15^\circ$

Bài 2. Tính giá trị các biểu thức

$$A = \frac{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} \text{ biết } \sin\alpha = \frac{3}{5} \text{ và } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$B = \frac{\sin^2\alpha + 2\sin\alpha.\cos\alpha - 2\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha - 3\sin\alpha.\cos\alpha + 4\cos^2\alpha} \text{ biết } \operatorname{cotg}\alpha = -3$$

$$C = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha \text{ biết } \sin\alpha + .\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$$

Bài 3. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\dfrac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = \sin^2\alpha.\cos^2\alpha$

b. $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\sin\alpha}$

c. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha}{\operatorname{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha$

d. $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos^3\alpha} = 1 + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^3\alpha$

Bài 4. Rút gọn các biểu thức:

$$A = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) - 3\sin(\alpha - 5\pi) - 2\sin\alpha - \cos\alpha$$

$$B = \frac{1 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha}{1 - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha}$$

$$C = \sin^2\alpha.\operatorname{tg}^2\alpha + 4\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 3\cos^2\alpha$$

$$D = \operatorname{tg}100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ}$$

Bài 5. Chứng minh rằng các biểu thức sau không phụ thuộc vào α

$$A = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha.\cos^2\alpha$$

$$B = 3(\sin^8\alpha - \cos^8\alpha) + 4(\cos^6\alpha - 2\sin^6\alpha) + 6\sin^4\alpha$$

Bài 6. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Chứng minh rằng:

a. $\sin\dfrac{A+B+3C}{2} = \cos C$ b. $\operatorname{tg}\dfrac{A+B+5C}{2} + \operatorname{cotg}2C = 0$

§3 CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Công thức cộng

$$\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$$

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}$$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$$

2. Công thức nhân đôi

$$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$tg2a = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}$$

3. Công thức nhân ba

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$tg3a = \frac{3tga - tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$$

4. Công thức hạ bậc

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \quad ; \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

5. Công thức tính theo $t = tg\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad ; \quad tgx = \frac{2t}{1 - t^2}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: ***Tính giá trị của một cung lượng giác***

Phương pháp

- Sử dụng bảng giá trị lượng giác của các cung đặc biệt
- Phân tích cung đã cho thành tổng, hiệu các cung đặc biệt
- Sử dụng công thức cộng

Bài 1:

a. *Tính* $\cos 15^o$; $\sin 135^o$; $tg\frac{5\pi}{12}$

b. *Tính* $\cos(\alpha + \frac{5\pi}{4})$, *biết* $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ *và* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

Giải:

a. $\cos15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos45^\circ.\cos30^\circ + \sin45^\circ.\sin30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sin135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg}\frac{5\pi}{12} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\text{tg}\frac{\pi}{4} + \text{tg}\frac{\pi}{6}}{1 - \text{tg}\frac{\pi}{4}.\text{tg}\frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

b. Ta có: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$

$$\cos^2 a = 1 - \sin^2 a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \cos a = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos(\alpha + \frac{5\pi}{4}) = \cos\alpha.\cos\frac{5\pi}{4} - \sin\alpha.\sin\frac{5\pi}{4}$$

mà $\cos\frac{5\pi}{4} = \cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin\frac{5\pi}{4} = \sin(\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Thay vào: $\cos(\alpha + \frac{5\pi}{4}) = \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

Dạng 2: ***Tính giá trị của một biểu thức lượng giác***

Bài 2: *Cho* $a - b = \frac{\pi}{3}$. *Tính giá trị của biểu thức:*

$A = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$

$B = (\cos a + \sin b)^2 + (\cos a + \sin b)^2$

Giải:

$$A = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$$
$$= \cos^2 a + \cos^2 b + \sin^2 a + \sin^2 b + 2(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b)$$
$$= 2 + 2\cos(a - b) = 2 + 2.\cos\frac{\pi}{3} = 2 + 2.\frac{1}{2} = 3$$

$$B = (\cos a + \sin b)^2 + (\cos b - \sin a)^2$$
$$= \cos^2 a + \sin^2 b + \cos^2 b + \sin^2 a + 2(\cos a.\sin b - \sin a.\cos b)$$
$$= 2 + 2\sin(b - a) = 2 + 2\sin(-\frac{\pi}{3}) = 2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

Bài 3: *Cho a, b là hai góc nhọn, dương và cosa =* $\frac{1}{7}$, *cos(a + b) =* $-\frac{11}{14}$.

Tính cosb ?

Phương pháp

- *Biểu diễn cos(a + b) = cosa.cosb – sina.sinb (*)*
- *Tính sina theo cosa và sinb theo cosb*
- *Thay kết quả vào (*), đưa về một phương trình chứa căn bậc hai*
- *Giải phương trình tìm x = cosb*

Giải:

$\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \qquad (*)$

$\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$

Do $0^\circ < a < 90^\circ$ nên sina > 0, suy ra: $\sin a = \frac{\sqrt{48}}{7}$.

$\sin^2 b = 1 - \cos^2 b$, $0^\circ < b < 90^\circ$ nên $\sin b = \sqrt{1 - \cos^2 b}$

Thay vào (*)

$$-\frac{1}{14} = \frac{1}{7}\cos b - \frac{\sqrt{48}}{7}\sqrt{1 - \cos^2 b}$$

Đặt x = cosb với 0 < x < 1 ta có: $8\sqrt{3(1 - x^2)} - 2x - 11 = 0$

$$\Leftrightarrow 196x^2 + 44x - 71 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{71}{98}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy: $\cos b = \frac{1}{2}$

Dạng 3: *Chứng minh một đẳng thức*

Bài 4: *Chứng minh các đẳng thức:*

a. $\frac{tg^2 a - tg^2 b}{1 - tg^2 a.tg^2 b} = tg(a + b).tg(a - b)$

b. $8(\cos^6 a + \sin^6 b) - 3\cos 4a = 5$

c. $tg3a - tg2a - tga = tga.tg2a.tg3a$

d. $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 1$

Giải:

a. $\frac{tg^2 a - tg^2 b}{1 - tg^2 a.tg^2 b} = \frac{(tga - tgb)(tga + tgb)}{(1 + tga.tgb)(1 - tga.tgb)} = tg(a - b).tg(a + b)$

b. Ta có: $\cos^6 a + \sin^6 a = (\cos^2 a + \sin^2 a)^3 - 3\cos^2 a.\sin^2 a(\cos^2 a + \sin^2 a)$

$= 1 - 3\cos^2 a.\sin^2 a = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2a$

$$= 1 - \frac{3}{4}\left(\frac{1-\cos 4a}{2}\right) = \frac{5+3\cos 4a}{8}$$

Thế vào: $8(\cos^6 a + \sin^6 a) - 3\cos 4a = 5 + 3\cos 4a - 3\cos 4a = 5$

c. $tg3a - tg2a - tga = tg(2a + a) - (tg2a + tga)$

$$= \frac{tg2a + tga}{1 - tg2a.tga} - (tg2a + tga)$$

$$= (tg2a + tga)\left(\frac{1}{1 - tg2a.tga} - 1\right)$$

$$= \frac{(tg2a + tga)}{1 - tg2a.tga}.tg2a.tga = tg3a.tg2a.tga$$

d. $8\sin^3 18^\circ + 8\sin^2 18^\circ = 8\sin^2 18^\circ(1 + \sin 18^\circ)$

$$= 8\sin^2 18^\circ(1 + \cos 72^\circ) = 16.\sin^2 18^\circ.\cos^2 36^\circ$$

$$= 16\left(\frac{2.\sin 18^O.\cos 18^O.\cos 36^O}{2.\cos 18^O}\right)^2 = 16\left(\frac{\sin 36^O.\cos 36^O}{2.\cos 18^O}\right)$$

$$= 16\left(\frac{\sin 72^O}{4.\cos 18^O}\right)^2 = 16\left(\frac{\cos 18^O}{4.\cos 18^O}\right)^2 = 1$$

Bài 5:

a. *Chứng minh các đẳng thức:*

$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$tg3a = \frac{3tga - tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$$

b. *Chứng minh $\sin 18^o$ là một số vô tỉ*

Giải:

a. Chứng minh:

$\sin 3a = \sin(2a + a) = \sin 2a.\cos a + \cos 2a.\sin a$

$= 2\sin a.\cos^2 a + (1 - 2\sin^2 a).\sin a$

$= 2\sin a(1 - \sin^2 a) + (1 - 2\sin^2 a).\sin a$

$= 3\sin a - 4\sin^3 a$

$\cos 3a = \cos(2a + a) = \cos 2a.\cos a - \sin 2a.\sin a$

$= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2(1 - \cos^2 a).\cos a$

$= 4\cos^3 a - 3\cos a$

$$tg3a = tg(2a + a) = \frac{tg2a + tga}{1 - tg2a.tga} = \frac{\frac{2tga}{1 - tg^2 a} + tga}{1 - \frac{2tg^2 a}{1 - tg^2 a}} = \frac{3tga - tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$$

b. Ta có: $\sin 36^\circ = \cos 54^\circ$

Mà: $\sin 36^\circ = 2\sin 18^\circ.\cos 18^\circ$

$\cos 54^\circ = \cos(3.18^\circ) = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$

Suy ra: $2\sin 18^\circ.\cos 18^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$

$\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ = 4\cos^2 18^\circ - 3$

$\Leftrightarrow 2\sin 18^\circ = 4(1 - \sin^2 18^\circ) - 3$

$\Leftrightarrow 4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$

Đặt $x = \sin 18^\circ$ thì $0 < x < 1$

Ta có: $4x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ hoặc $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ (loại)

Vậy: $\sin 18^\circ = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ là một số vô tỉ

Dạng 4: ***Rút gọn biểu thức***

Bài 6: Rút gọn các biểu thức sau:

a. $A = \cos(\frac{\pi}{4} + a).\cos(\frac{\pi}{4} - a) + \frac{1}{2}\sin^2 a$

b. $B = \dfrac{1 + \cos a - \sin a}{1 - \cos a - \sin a}$

c. $C = \sin^3\frac{a}{3} = 3\sin^3\frac{a}{9} + 9\sin^3\frac{a}{27}$

d. $D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a}}}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$

Giải:

a. $A = (\cos\frac{\pi}{4}.\cos a - \sin\frac{\pi}{4}.\sin a)(\cos\frac{\pi}{4}.\cos a + \sin\frac{\pi}{4}.\sin a) + \frac{1}{2}\sin^2 a$

$= (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin a)(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos a + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin a) + \frac{1}{2}\sin^2 a$

$= \frac{1}{2}(\cos^2 a - \sin^2 a) + \frac{1}{2}\sin^2 a = \frac{1}{2}\cos^2 a$

b. $$B = \frac{2\cos^2\frac{a}{2} - 2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}}{2\sin^2\frac{a}{2} - 2\sin\frac{a}{2}.\cos\frac{a}{2}} = \frac{2\cos\frac{a}{2}\left(\cos\frac{a}{2} - \sin\frac{a}{2}\right)}{2\sin\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)} = -\cot\frac{a}{2}$$

c. Ta có: $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a \Rightarrow \sin^3 a = \frac{3}{4}\sin a - \frac{1}{4}\sin 3a$

$$C = \left(\frac{3}{4}\sin\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\sin a\right) + 3\left(\frac{3}{4}\sin\frac{a}{9} - \frac{1}{4}\sin\frac{a}{3}\right) + 9\left(\frac{3}{4}\sin\frac{a}{27} - \frac{1}{4}\sin\frac{a}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(27\sin\frac{a}{27} - \sin a\right)$$

d. Ta có: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a = \frac{1+\cos a}{2} = \cos^2\frac{a}{2}$

Suy ra: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a} = \sqrt{\cos^2\frac{a}{2}} = \cos\frac{a}{2}$ (do $0 < a < \frac{\pi}{2}$)

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{a}{2}} = \cos\frac{a}{4}$$

$$D = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos a}}} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{a}{4}} = \cos\frac{a}{8}$$

Dạng 5: ***Chứng minh đẳng thức giữa các giá trị lượng giác của các góc trong một tam giác***

Bài 7: *Cho tam giác ABC không phải là tam giác vuông. Chứng minh:*

a. $tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

b. $cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} = cotg\frac{A}{2}.cotg\frac{B}{2}.cotg\frac{C}{2}$

Giải:

a. Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C$

Suy ra: $tg(A + B) = tg(\pi - C)$

$$\Leftrightarrow \frac{tgA + tgB}{1 - tgA.tgB} = -tgC$$

$$\Leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$$

b. Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$

Suy ra: $tg\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2}}{1 - tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}} = cotg\frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{tg\frac{A}{2}} + \frac{1}{tg\frac{B}{2}}}{\frac{1}{tg\frac{A}{2}}.\frac{1}{tg\frac{B}{2}} - 1} = cotg\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2}}{cotg\frac{A}{2}.cotg\frac{B}{2} - 1} = cotg\frac{C}{2}$$

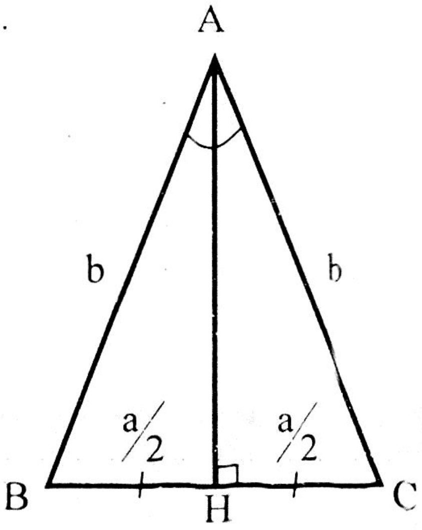
$$\Leftrightarrow cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} = cotg\frac{A}{2}.cotg\frac{B}{2}.cotg\frac{C}{2}$$

Bài 8: *Cho tam giác cân ABC, cạnh đáy có độ dài a, cạnh bên có độ dài b, góc ở đỉnh bằng 20°. Chứng minh: $a^3 + b^3 = 3ab^2$*

Giải:

Gọi ΔABC cân tại A và có AB = AC = b, BC = a, $\widehat{BAC} = 20^\circ$

Kẻ đường cao AH thì AH là phân giác $\widehat{BAC}$.



Suy ra $\widehat{HAC} = 10^\circ$

Trong tam giác vuông AHC:

$$\sin\widehat{AHC} = \frac{HC}{AC} \Leftrightarrow \sin 10^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{b}$$

$$\Leftrightarrow a = 2b\sin 10^\circ$$

Ta có: $a^3 + b^3$

$= 8b^3\sin^3 10^\circ + b^3 = 2b^3(4\sin^3 10^\circ + \frac{1}{2})$

$= 2b^3(4\sin^3 10^\circ + \sin 30^\circ)$

Ta có: $\sin 30^\circ = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$

Suy ra: $a^3 + b^3 = 2b^3.3\sin 10^\circ = 3b^2.2b\sin 10^\circ = 3b^2a$

Vậy: $a^3 + b^3 = 3ab^2$

C. BÀI TẬP

Bài 1. Cho $\cos a = \frac{3}{5}$ và $\cos b = \frac{12}{13}$ với $0 < a < \frac{\pi}{2}$ và $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$

Tính: $\cos(a + b)$; $\sin(a - b)$; $tg(a + b)$

Bài 2. Cho a, b là hai góc nhọn và $a + b = \frac{\pi}{4}$, $tga.tgb = 3 - 2\sqrt{2}$

a. Tính tg(a + b) và tga, tgb

b. Tính a và b

Bài 3. Cho $2tga - 5cotga = 3$ với $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$. Tính:

a. tga b. $\frac{1 - \sin 2a}{\cos 2a}$ c. cotg3a

Bài 4. Cho $\sin a + \cos a = \frac{1}{5}$. Tính $tg\frac{a}{2}$

Bài 5. Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\frac{1 + \cos a + \cos 2a + \cos 3a}{2\cos^2 a + \cos a - 1} = 2\cos a$

b. $\sin a + \frac{\cos 3a + \sin 3a}{1 + 2\sin 2a} = \cos a$

c. $\dfrac{\cos 2a}{1+\operatorname{tg}a}+\sin^2 a-\dfrac{1}{2}\sin^2 a=(\sin a-\cos a)^2$

d. $\cos\dfrac{\pi}{32}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

Bài 6. Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc vào a

$$A=\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-a\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+a\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-a\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+a\right)-2\sin^2 a$$

$$B=\cos^6 a+2\sin^4 a.\cos^2 a+3\sin^2 a.\cos^4 a+\sin^4 a$$

Bài 7. Tinh giá trị các biểu thức sau:

$$A=\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{5\pi}{7}$$

$$B=\sin 6^\circ.\sin 42^\circ.\sin 66^\circ.\sin 78^\circ$$

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thoả mãn:

$$\cos\frac{C}{2}.\cos(A-B)+\cos C.\cos\frac{A-B}{2}=0$$

Tính: sinA + sinB

Bài 9. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C thoả mãn:

$\operatorname{tg}A.\operatorname{tg}B=3$, $\operatorname{tg}B.\operatorname{tg}C=6$

Chứng minh tam giác có một góc bằng 45°

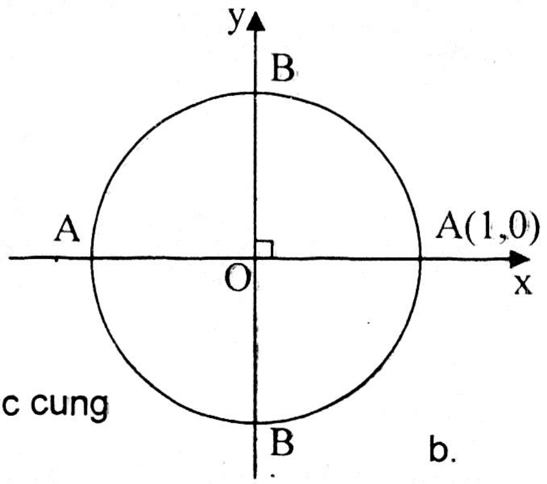
Bài 10. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác.

Chứng minh: $\operatorname{tg}5A+\operatorname{tg}5B+\operatorname{tg}5C=\operatorname{tg}5A.\operatorname{tg}5B.\operatorname{tg}5C$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

A. CÂU HỎI

1. Hãy viết số đo các cung lượng giác biểu diễn trên đường tròn lượng giác có điểm đầu A (hình vẽ)
    a. Có điểm cuối A'
    b. Có điểm cuối B
    c. Có điểm cuối A
    d. Có điểm cuối B'



2. So sánh giá trị lượng giác của các cung
    a. x và –x
    b. x và cung bù với nó
    c. x và cung phụ với nó
    d. x và π + x
3. Đọc các công thức lượng giác
    a. Công thức cộng
    b. Công thức nhân đôi

B. CÁC DẠNG TOÁN

Bài 1:

a. Cho sina + cosa = $\sqrt{2}$, tính $A = \dfrac{1+\cos 2a}{\cot g\dfrac{a}{2} - tg\dfrac{a}{2}}$

b. Tính B = sin15° + tg30°.cos15°

Bài 2: Cho tg(a + b) = 5 và tg(a − b) = 3. Tính tg2a và tg2b

Bài 3: Chứng minh các đẳng thức sau:

$$\cos a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - (\cos a + b)\right]$$

$$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

Bài 4: Cho 5sina = 3sin(a + 2b). Chứng minh: tg(a + b) = 4tgb

Bài 5: Tính giá trị của biểu thức:

$A = tg20^\circ.tg40^\circ.tg60^\circ.tg80^\circ$ $\qquad$ $B = \cos\dfrac{\pi}{7} - \cos\dfrac{2\pi}{7} + \cos\dfrac{3\pi}{7}$

Bài 6: Chứng minh các đẳng thức sau:

a. $\dfrac{2\sin 2a - \sin 4a}{2\sin 2a + \sin 4a} = tg^2a$

b. $\dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a + \cos^4 a}{\cos^2 a - \sin^2 a + \sin^4 a} = tg^4a$

c. $(tg2a - tga)(\sin 2a - tga) = tg^2a$

Bài 7: Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + a).\cos(\frac{3\pi}{2} + a).tg(\pi + a)}{\sin(\pi + a).\cos(\frac{3\pi}{2} - a).tg(a - \frac{\pi}{2})}$$

$$B = \left(\frac{\cos a}{\sin b} + \frac{\sin a}{\cos b}\right).\frac{1 - \cos 4b}{\cos(\pi + b - a)}$$

Bài 8: Cho A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh:

$$tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4} + tg\frac{A}{4}.tg\frac{B}{4} + tg\frac{B}{4}.tg\frac{C}{4} + tg\frac{A}{4}.tg\frac{C}{4} - tg\frac{A}{4}.tg\frac{B}{4}.tg\frac{C}{4} = 1$$

Bài 9: Cho ΔABC có ba góc nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = tgA.tgB.tgC$$

Bài 10: Cho ΔABC có ba góc A, B, C thoả mãn: sinA + sinB = cosA + cosB
Tính giá trị góc C.

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Chọn câu đúng trong các bài tập sau:

1. Giá trị của $\cos\frac{47\pi}{6}$ là

a. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c. $\frac{1}{2}$

d. $-\frac{1}{2}$

2. Cho $\sin a = -\frac{2}{3}$ với $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, giá trị của cotga là:

a. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b. $-\frac{2}{\sqrt{5}}$

c. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ d. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

3. Cho tga = 2, giá trị của biểu thức: $A = \frac{4\sin 2a + 5\cos 2a}{2\sin 2a - 3\cos 2a}$ là:

a. $-\frac{2}{3}$ b. $\frac{1}{17}$

c. $\frac{2}{9}$ d. $\frac{2}{15}$

4. Cho $a = \frac{2\pi}{3}$, giá trị của biểu thức $A = 4(\sin^4 a + \cos^4 a) - \cos 4a$ là:

a. 3 b. $\sqrt{3}$

c. 0 d. 1

5. Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$ là:

a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{4}$

c. 2 d. 1

HƯỚNG DẪN – LỜI GIẢI – ĐÁP SỐ

§1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

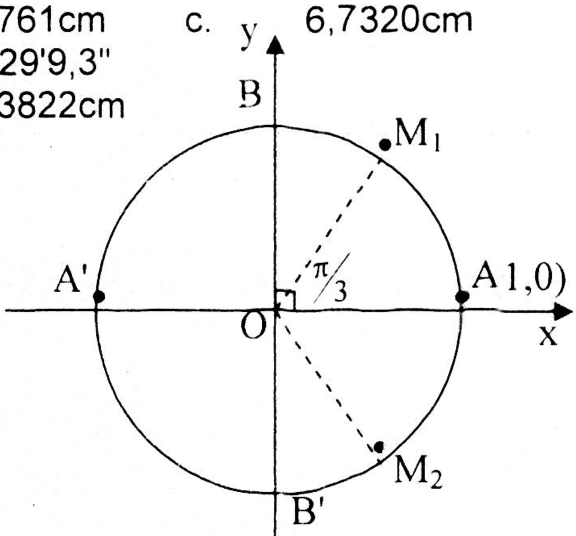
Bài 1

1. Lấy 4 chữ số thập phân nên:
   a. 1,2572 b. 0,7365 c. –4,3633
   d. –1,3715
2. a. 76°23'39,74" b. 128°34'17,1"
   c. –612° d. –229°10'59,2"

Bài 2

1. a. 5cm b. 4,2761cm c. 6,7320cm
2. a. 42°58'18,6" b. 21°29'9,3"
3. a. 10cm b. 15,3822cm

Bài 3



a. $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$

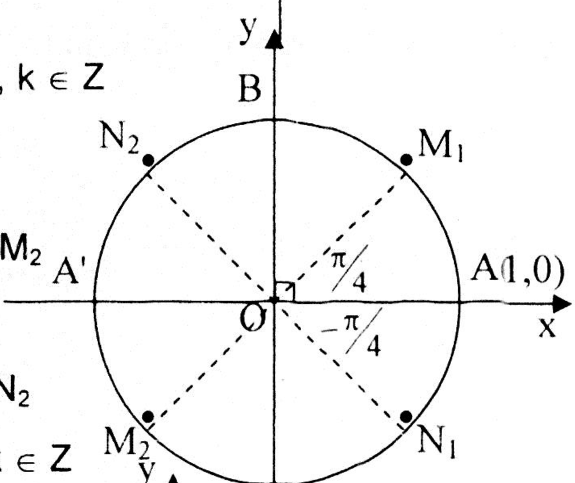
sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in Z$

Điểm cuối M trùng với các điểm:
M_1, A', M_2

sđ $\overset{\frown}{AN} = -\pi + k2\pi$, $k \in Z$

Điểm cuối N trùng với điểm A'

Công thức tổng quát: $\alpha' = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$, $k \in Z$



b. sđ $\overset{\frown}{AM} = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Điểm cuối M trùng với các điểm M_1, M_2

sđ $\overset{\frown}{AN} = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$

Điểm cuối N trùng với các điểm N_1, N_2

Công thức tổng quát $\alpha' = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$

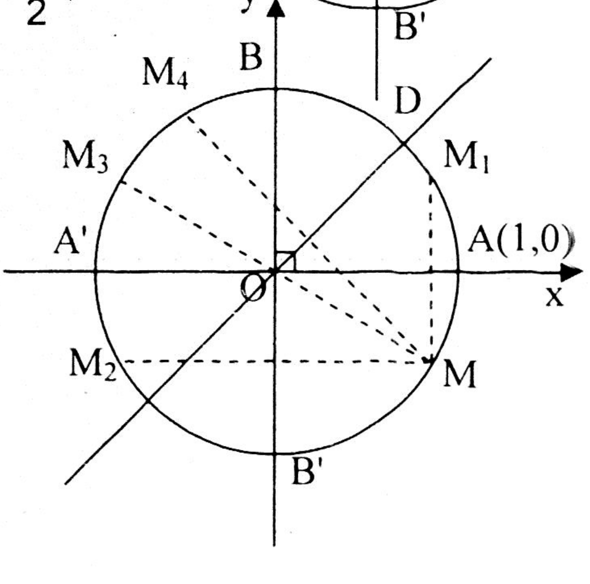
Bài 4.

sđ $\overset{\frown}{AM_1} = 35° + k360°$, $k \in Z$

sđ $\overset{\frown}{AM_2} = 215° + k360°$, $k \in Z$

sđ $\overset{\frown}{AM_3} = 145° + k360°$, $k \in Z$

sđ $\overset{\frown}{AM_4} = 105° + k360°$, $k \in Z$



Bài 5.

sđ $\overset{\frown}{AB} = 425^\circ + k360^\circ,\ k \in Z$

Suy ra: $425^\circ + k360^\circ < 0 \Leftrightarrow k < -\dfrac{425}{360}$

Suy ra: $k = -2$

Khi $k = -2$, cung $\overset{\frown}{AB}$ có số đo âm lớn nhất là -295°

§2. CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

Bài 1

a. $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ $\qquad$ $tg\alpha = -\dfrac{3}{4}$ $\qquad$ $cotg\alpha = -\dfrac{4}{3}$

b. $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ $\qquad$ $tg\alpha = -\dfrac{5}{12}$ $\qquad$ $cotg\alpha = -\dfrac{12}{5}$

c. $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $\sin\alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ $\qquad$ $cotg\alpha = \dfrac{1}{3}$

d. $tg\alpha = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$ $\qquad$ $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$

Bài 2

$A = \dfrac{25}{7}$; $\qquad B = -\dfrac{23}{47}$

$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} - 1 \quad \Leftrightarrow (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = (\sqrt{2} - 1)^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \Leftrightarrow \sin\alpha.\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}$

$C = \sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha.\cos\alpha)$

$\quad = (\sqrt{2} - 1)(1 - 1 + \sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$

Bài 3

a. $$\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot g^2\alpha - tg^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{(\cot g\alpha + tg\alpha)(\cot g\alpha - tg\alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha).\cos^2\alpha.\sin^2\alpha}{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}$$

$= \cos^2\alpha.\sin^2\alpha$

b. $$\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + 1 + 2\cos\alpha + \cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}$$

$$= \frac{2(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$$

c. $$\frac{tg^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cot g^2\alpha - \cos^2\alpha} = \frac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \sin^2\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right)}{\cos^2\alpha\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1\right)}$$

$$= \frac{\sin^2\alpha.\sin^2\alpha.\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha.\cos^2\alpha.\cos^2\alpha} = tg^6\alpha$$

d. $$1 + tg\alpha + tg^2\alpha + tg^3\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}$$

$$= \frac{\cos\alpha + \sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}{\cos^3\alpha} = \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos^3\alpha}$$

Bài 4

a. $\sin(\frac{5\pi}{2} - \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi) = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(\frac{13\pi}{2} - \alpha) = \cos(6\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\alpha - 5\pi) = \sin(\alpha - \pi - 4\pi) = \sin(\alpha - \pi) = -\sin\alpha$

Thế vào, ta có A = 0

b. $B = \frac{2}{3\cos^2\alpha}$

c. C = 3

d. $$tg100^\circ + \frac{\sin 530^\circ}{1 + \sin 640^\circ} = tg(90^\circ + 10^\circ) + \frac{\sin(170^\circ + 360^\circ)}{1 + \sin(720^\circ - 80^\circ)}$$

$$= -cotg10^\circ + \frac{\sin 170^\circ}{1 - \sin 80^\circ} = -\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} + \frac{\sin 10^\circ}{1 - \cos 10^\circ}$$

$$= -\frac{\cos 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ}{\sin 10^\circ(1 - \cos 10^\circ)} = \frac{1 - \cos 10^\circ}{\sin 10^\circ(1 - \cos 10^\circ)} = \frac{1}{\sin 10^\circ}$$

Bài 5

a. A = 1

b. Đặt a = $\sin^2\alpha$ thì $\cos^2\alpha = 1 - a$, thay vào ta có: B = 1

Bài 6

a. $$A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{A+B+3C}{2} = \frac{\pi}{2} + C$$

Suy ra: $\sin\left(\frac{A+B+3C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + C\right) = \cos C$

b. $\frac{A+B+5C}{2} = \frac{\pi}{2} + 2C$

Suy ra: $\text{tg}\left(\frac{A+B+5C}{2}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2C\right) = -\text{cotg}2C$

$\Leftrightarrow \text{tg}\left(\frac{A+B+5C}{2}\right) + \text{cotg}2C = 0$

§3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Bài 1

$\cos a = \frac{3}{5}$ và $0 < a < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin a = \frac{4}{5}$

$\cos b = \frac{12}{13}$ và $\frac{3\pi}{2} < b < 2\pi$ nên $\sin b = -\frac{5}{13}$

$\cos(a+b) = \frac{56}{65}$; $\sin(a-b) = \frac{63}{65}$; $\text{tg}(a+b) = \frac{33}{56}$

Bài 2

a. $\text{tg}(a+b) = \text{tg}\frac{\pi}{4} = 1$

$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg}a + \text{tg}b}{1 - \text{tg}a.\text{tg}b} = 1 \Rightarrow \text{tg}a + \text{tg}b = -2 + 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \text{tg}a + \text{tg}b = -2 + 2\sqrt{2} \\ \text{tg}a.\text{tg}b = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \text{tg}a = \text{tg}b = -1 + \sqrt{2}$

b. $a = b = \frac{\pi}{8}$

Bài 3

a. Ta có: $2\text{tg}a - 5\text{cotg}a = 3 \Leftrightarrow 2\text{tg}a - \frac{5}{\text{tg}a} = 3$

$\Leftrightarrow 2\text{tg}^2a - 3\text{tg}a - 5 = 0 \Leftrightarrow \text{tg}a = -1$ hoặc $\text{tg}a = \frac{5}{2}$

Do $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\text{tg}a > 0$, vậy $\text{tg}a = \frac{5}{2}$

b. $$\frac{1-\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{1 - \frac{2\text{tg}a}{1+\text{tg}^2a}}{1 - \frac{\text{tg}^2a}{1+\text{tg}^2a}} = \frac{(1-\text{tg}a)^2}{1-\text{tg}^2a} = \frac{1-\text{tg}a}{1+\text{tg}a} = -\frac{3}{7}$$

c. $\text{cotg}3a = \dfrac{1}{\text{tg}3a} = \dfrac{1-3\text{tg}^2a}{3\text{tga}-\text{tg}^3a} = -\dfrac{77}{207}$

Bài 4

Đặt $t = \text{tg}\dfrac{a}{2}$

Ta có: $\sin a = \dfrac{2t}{1+t^2}$ và $\cos a = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

Suy ra: $\dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ hoặc $t = -\dfrac{1}{3}$

Vậy: $\text{tg}\dfrac{a}{2} = 2$ hoặc $\text{tg}\dfrac{a}{2} = -\dfrac{1}{3}$

Bài 5

a. $\dfrac{1+\cos 2a + \cos a + \cos 3a}{2\cos^2a + \cos a - 1} = \dfrac{2\cos^2a + \cos a + 4\cos^3a - 3\cos a}{2\cos^2a + \cos a - 1}$

$= \dfrac{2\cos a(2\cos^2a + \cos a - 1)}{2\cos^2a + \cos a - 1} = 2\cos a$

b. $\sin a + \dfrac{\cos 3a + \sin 3a}{1+2\sin 2a} = \sin a + \dfrac{4\cos^3a - 3\cos a + 3\sin a - 4\sin^3a}{1+2\sin 2a}$

$= \sin a + \dfrac{4(\cos^3a - \sin^3 a) - 3(\cos a - \sin a)}{1+2\sin 2a}$

$= \sin a + \dfrac{(\cos a - \sin a)(1 + 4\sin a.\cos a)}{1+4\sin a.\cos a}$

$= \sin a + \cos a - \sin a = \cos a$

c. $\dfrac{\cos 2a}{1 + \text{tga}} + \sin^2a - \dfrac{1}{2}\sin 2a = \dfrac{\cos^2a - \sin^2 a}{1+\dfrac{\sin a}{\cos a}} + \sin^2a - \sin a.\cos a$

$= \cos a(\cos a - \sin a) + \sin^2a - \sin a.\cos a$

$= 1 - 2\sin a.\cos a = (\sin a - \cos a)^2$

d. $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$$\cos\frac{\pi}{16}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{8}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$\cos\frac{\pi}{32}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{16}}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

Bài 6

A =

$$\frac{1+\cos(\frac{2\pi}{3}-2a)}{2}+\frac{1+\cos(\frac{2\pi}{3}+2a)}{2}+\frac{1+\cos(\frac{4\pi}{3}-2a)}{2}+\frac{1+\cos(\frac{4\pi}{3}+2a)}{2}-2\sin^2 a$$

$$=2+\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2a\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2a\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2a\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2a\right)\right]-2\sin^2 a$$

$$=2+\frac{1}{2}\left(2\cos\frac{2\pi}{3}.\cos 2a+2\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2a\right)-2\sin^2 a$$

$$=2-\cos 2a-(1-\cos 2a)=1$$

b. Đặt $u=\cos^2 a$ thì $\sin^2 a=1-u$

Ta có: $B=u^3+2(1-u)^2u+3(1-u)u^2+(1-u)^2$

$B=1$

Bài 7

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{\pi}{7}.\cos\frac{\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$=-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\frac{4\pi}{7}.\cos\frac{4\pi}{7}}{4\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$A=\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}=\frac{1}{8}$$

$$B=\frac{1}{8}$$

Bài 8

$$\cos\frac{C}{2}.\cos(A-B)+\cos C.\cos\frac{A-B}{2}=0$$

$\Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}.(2\cos^2\frac{A-B}{2} - 1) + (2\cos^2\frac{C}{2} - 1).\cos\frac{A-B}{2} = 0$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2}\ (\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C}{2}) - (\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C}{2}) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C}{2})(2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 1) = 0\ (*)$

Do A, B, C là 3 góc trong một tam giác nên:

$\cos\frac{A}{2} > 0, \cos\frac{B}{2} > 0, \sin\frac{A}{2} > 0, \sin\frac{B}{2} > 0$

Suy ra: $\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{C}{2} = \cos\frac{A-B}{2} + \sin\frac{A+B}{2}$

$= \cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} + \sin\frac{A}{2}.\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}.\sin\frac{B}{2} > 0$

Từ (*) ta có: $2\cos\frac{C}{2}.\cos\frac{A-B}{2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \sin A + \sin B - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin A + \sin B = 1$

Bài 9

Ta có: tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC

Từ giả thiết: tgA.tgB = 3 và tgB.tgC = 6

Suy ra: $tg^2B = 9 \Leftrightarrow$ tgB = –3; tgA = –1

tgB = 3; tgA = 1

Khi tgB = –3 và tgA = –1 thì ΔABC có hai góc tù (vô lý)

Vậy: tgA = 1 $\Rightarrow \widehat{A} = 45^o$

Bài 10

Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow 5A + 5B = 5\pi - 5C$

Suy ra: $tg(5A + 5B) = tg(5\pi - 5C)$

$\Leftrightarrow \frac{tg5A + tg5B}{1 - tg5A.tg5B} = -tg5C \Leftrightarrow tg5A + tg5B + tg5C = tg5A.tg5B.tg5C$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG VI

A. CÂU HỎI

1. a. sđ $\overset{\frown}{AA'} = \pi + k2\pi, k \in Z$ b. sđ $\overset{\frown}{AB} = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

c. sđ $\overset{\frown}{AA} = k2\pi, k \in Z$ d. sđ $\overset{\frown}{AB'} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$

2. Xem tóm tắt lý thuyết mục 2: Giá trị lượng giác các cung liên quan đặc biệt của §2 – Các giá trị lượng giác của một cung
3. Xem tóm tắt lý thuyết §3 – Công thức lượng giác

B. BÀI TẬP

1. a. $$A = \frac{1+\cos 2a}{\cot g\frac{a}{2} - tg\frac{a}{2}} = \frac{2\cos^2 a}{\frac{2\cos a}{\sin a}} = \sin a.\cos a$$

$$A = \frac{(\sin a + \cos a)^2 - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

b. $$B = \sin 15^o + tg30^o.\cos 15^o = \sin 15^o + \frac{\sin 30^o}{\cos 30^o}.\cos 15^o$$

$$= \frac{\sin 15^o.\cos 30^o + \cos 15^o.\sin 30^o}{\cos 30^o} = \frac{\sin 45^o}{\cos 30^o} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

2. $$tg2a = tg(a + b + a - b) = \frac{tg(a+b) + tg(a-b)}{1 - tg(a+b) + tg(b-a)} = -\frac{4}{7}$$

$$tg2b = tg(b + a + b - a) = \frac{tg(a+b) + tg(b-a)}{1 - tg(a+b) + tg(b-a)} = \frac{tg(a+b) - tg(a-b)}{1 + tg(a+b).tg(a-b)} = \frac{1}{8}$$

3. Ta có: $\cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$

$\cos(a - b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$

Suy ra: $\cos a.\cos b = \frac{1}{2}[coss(a - b) + \cos(a + b)]$

$\sin a.\sin b = \frac{1}{2}[coss(a - b) + \cos(a + b)]$

Tương tự: $\sin(a + b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$

$\sin(a - b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$

Suy ra: $\sin a.\cos b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) + \sin(a - b)]$

4. $$\frac{tg(a+b)}{tgb} = \frac{\sin(a+b).\cos b}{\cos(a+b).\sin b} = \frac{\frac{1}{2}[\sin(a+2b)+\sin a]}{\frac{1}{2}[\sin(a+2b)-\sin a]} = \frac{\frac{5}{3}\sin a + \sin a}{\frac{5}{3}\sin a - \sin a} = 4$$

5. $$A = tg20^o.tg40^o.tg60^o.tg80^o = \frac{\sin 20^o.\sin 40^o.\sin 60^o.\sin 80^o}{\cos 20^o.\cos 40^o.\cos 60^o.\cos 80^o}$$

$$A_1 = \sin 20^o.\sin 40^o.\sin 60^o.\sin 80^o = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 40^o.\frac{1}{2}(\cos 60^o - \cos 100^o)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2}\sin 40^o - \sin 40^o.\cos 100^o) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\frac{1}{2}\sin 40^o - \frac{1}{2}\sin 40^o + \frac{1}{2}\sin 60^o)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$$

$$A_2 = \cos 20^o.\cos 40^o.\cos 60^o.\cos 80^o$$

$$= \frac{2\sin 20^o.\cos 20^o.\cos 40^o.\cos 60^o.\cos 80^o}{2\sin 20^o}$$

$$= \frac{\sin 40^o.\cos 40^o.\cos 80^o.\cos 60^o}{2\sin 20^o} = \frac{\sin 80^o.\cos 80^o}{8\sin 20^o}$$

$$= \frac{\sin 160^o}{16\sin 20^o} = \frac{\sin 20^o}{16\sin 20^o} = \frac{1}{16}$$

Suy ra: $A = \frac{A_1}{A_2} = 3$

$$B = \cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{\cos\frac{\pi}{14}\left(\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}\right)}{\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{14}.\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{\pi}{14}.\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{\pi}{14}.\cos\frac{3\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{14} + \cos\frac{3}{14} - \cos\frac{5\pi}{14} - \cos\frac{3\pi}{14} + \cos\frac{5\pi}{14} + \cos\frac{\pi}{2}}{2\cos\frac{\pi}{14}}$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{14}}{2\cos\frac{\pi}{14}} = \frac{1}{2}$$

6. a. $\frac{2\sin 2a - \sin 4a}{2\sin 2a + \sin 4a} = \frac{2\sin 2a(1-\cos 2a)}{2\sin 2a(1+\cos 2a)} = \frac{2\sin^2 a}{2\cos^2 a} = tg^2a$

b. $\frac{\sin^2 a - \cos^2 a + \cos^4 a}{\cos^2 a - \sin^2 a + \sin^4 a} = \frac{\sin^2 a - \cos^2 a(1-\cos^2 a)}{\cos^2 a - \sin^2 a(1-\sin^2 a)}$

$$= \frac{\sin^2 a - \cos^2 a.\sin^2 a}{\cos^2 a - \sin^2 a.\cos^2 a} = \frac{\sin^2 a(1-\cos^2 a)}{\cos^2 a(1-\sin^2 a)} = tg^4a$$

c. $(tg2a - tga)(\sin 2a - tga) = \left(\frac{2tga}{1-tg^2a} - tga\right)\left(2\sin a\cos a - \frac{\sin a}{\cos a}\right)$

$$= tga\left(\frac{1+tg^2a}{1-tg^2a}\right).\sin a\left(2\cos a - \frac{1}{\cos a}\right)$$

$$= \frac{tga}{cos2a} \cdot \frac{sin a(2cos^2 a - 1)}{cosa} = \frac{tga.sin a.cos2a}{cos2a.cosa} = tg^2 a$$

7. $A = tg^2 A$; $B = 4sin2b$

8. Ta có $A + B + C = \pi \Leftrightarrow \frac{A+B}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}$

$$tg\left(\frac{A+B}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4}}{1 - tg\frac{A}{4}.tg\frac{B}{4}} = \frac{1 - tg\frac{C}{4}}{1 + tg\frac{C}{4}}$$

$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{4} + tg\frac{B}{4} + tg\frac{C}{4} + tg\frac{A}{4}.tg\frac{B}{4} + tg\frac{B}{4}.tg\frac{C}{4} + tg\frac{C}{4}.tg\frac{A}{4} - tg\frac{A}{4}.tg\frac{B}{4}.tg\frac{C}{4} = 1$$

9. Ta có: $A + B + C = \pi \Leftrightarrow A + B = \pi - C$

Suy ra: $tg(A + B) = tg(\pi - C) \Leftrightarrow tgA + tgB + tgC = tgA.tgB.tgC$

Do A, B, C là ba góc nhọn nên $tgA > 0$, $tgB > 0$ và $tgC > 0$, theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$P = tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt[3]{tgA.tgB.tgC}$$

$$P \geq 3\sqrt[3]{P} \Leftrightarrow P^2 \geq 27 \Leftrightarrow P \geq 3\sqrt{3}$$

Suy ra: $P = 3\sqrt{3}$ khi $tgA = tgB = tgC$

$P = 3\sqrt{3}$ khi $A = B = C$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $3\sqrt{3}$ khi tam giác ABC là tam giác đều

10. Ta có: $sinA + sinB = cosA + cosB \Leftrightarrow sinA - cosA = cosB - sinB$

Nhân hai vế đẳng thức với $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}sinA - \frac{\sqrt{2}}{2}cosA = \frac{\sqrt{2}}{2}cosB - \frac{\sqrt{2}}{2}sinB$$

$$\Leftrightarrow cos\frac{\pi}{4}.sinA - sin\frac{\pi}{4}.cosA = sin\frac{\pi}{4}.cosB - cos\frac{\pi}{4}.sinB$$

$$\Leftrightarrow sin(A - \frac{\pi}{4}) = sin(\frac{\pi}{4} - B)$$

Do A, B là các góc của một tam giác nên ta có:

$$A - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - B \Leftrightarrow A + B = \frac{\pi}{2}$$

Suy ra: $C = \frac{\pi}{2}$

C. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. $\cos\frac{47\pi}{6} = \cos\left(\frac{48\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{\;}\sqrt{3}}{2\;2}$

Chọn câu đúng là b)

2. $\sin a = -\frac{2}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos a = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\text{cotga} = \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ Chọn câu đúng là c)

3. Chọn câu đúng là b) $\frac{1}{17}$

4. $A = 4(\sin^4 a + \cos^4 a) - \cos 4a$

$= 4[\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2\sin^2 a.\cos^2 a] - \cos 4a$

$= 4(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2a) - \cos 4a$

$= 4 - 2\sin^2 2a - (1 - 2\sin^2 2a) = 3$ Chọn câu đúng là a)

5. $A =$

$$\frac{1}{2\sin 10^o} - 2\sin 70^o = \frac{1 - 4\sin 10^o.\sin 70^o}{2\sin 10^o} = \frac{1 - 2(\cos 60^o - \cos 80^o)}{2\sin 10^o}$$

$$= \frac{1 - 1 + 2\cos 80^o}{2\sin 10^o} = \frac{2\cos(90^o - 10^{o)}}{2\sin 10^o} = 1$$ Chọn câu đúng là d)d)

* * *

MỤC LỤC

Chương 1: Mệnh đề – tập hợp 3
§1 Mệnh đề 3
§2 Mệnh đề chứa biến 6
§3. PP chứng minh bằng phản chứng 9
§4. Tập hợp 11
§5. Các phép toán trên tập hợp 14

Chương 2: Hàm số bậc nhất và bậc hai

§1. Hàm số 24
§2 Hàm số bậc I 32
§3. HS y = |x| , y = |ax + b| , y = [x] 39
§4. HS bậc II 62
Chương 3: Phương trình – hệ phương trình 71
§1. Phương trình bậc nhất một ẩn 71
§2. Hệ pt bậc I nhiều ẩn 82
§3. Phương trình bậc II 95
§4. Hệ pt bậc II 108
Chương 4: Bất đẳng thức – Bất p.trìtrình 14
§1. Bất đẳng thức 14
§2. BĐT Cô-si, BĐT chứa giá trị tuyệt đt đối 147
§3. Bất phương trình (BPT) một ẩn 15
§4. Dấu của nhị thức bậc I 16
§5. BPT bậc I hai ẩn 16
§6. Dấu của tam thức bậc II- BPT bậc Ic II ..17
§7. ĐL đảo về dấu của tam thức bậc Ic II 18
§8. Một số PT qui về PT bậc II 19
Chương V: Thống kê 24
Chương VI: Góc lượng giác và côngng thứ lượng giác 26
§1. Góc và cung lượng giác 26
§2. Các giá trị lượng giác trong một cungung . 26
§3. Công thức lượng giác 27